Posgrado de la UNAM
Maestría en ciencias matemáticas

Curso avanzado en análisis

Teoría Espectral

Nils Ackermann

2015-2

Índice general

Prólogo

Para poder apreciar mejor la importancia de la teoría espectral recordemos la forma normal de Jordan para matrices en $\mathbb{C}^n$. Mediante el cambio de base a vectores propios generalizados se obtiene una representación del comportamiento de un operador. La estructura de ese comportamiento es dada por los subespacios invariantes y los valores propios. Una aplicación importante es la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Sea $x\colon [0,T] \to \mathbb{C}$ la solución de la ecuación $\dot{x} = Ax$, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n$. En un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias uno aprende que la solución está representada por $x(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0$, y se le da un sentido al exponencial de la matriz tA mediante la forma normal de Jordan de A.

Análogamente, si uno quiere resolver la ecuación del calor

$$\frac{d}{dt}u(t,x) = \Delta u(t,x),$$

escribiendo formalmente $\dot{u} = \Delta u$, uno también quiere llegar a escribir la solución como $u(t,x) = \mathrm{e}^{t\Delta}u_0(x)$, donde u_0 es la distribución de temperatura al tiempo inicial. Aquí Δ es un operador lineal no acotado en un espacio de Banach adecuado. Uno de los temas de la teoría espectral general es dar un sentido al exponencial de un operador lineal en un espacio de Banach. Como en el caso de dimensión finita hay que analizar la estructura del operador mediante su espectro y sus subespacios invariantes. Aquí en general nos restringiremos a operadores normales. En dimensión finita los operadores normales son aquellos cuya matriz de representación tiene una forma normal de Jordan diagonal.

Los objetos básicos de la teoría espectral son las álgebras de Banach y los espectros de sus elementos. Informalmente, un álgebra de Banach A es un álgebra compleja con elemento unitario e que también es un espacio complejo de Banach, y que tiene ciertas propiedades. El espectro $\sigma(x)$ de un $x \in A$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ que representa los "valores" que toma x en un cierto sentido. Formalmente, $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $\lambda e - x$ no es invertible en A respecto a la multiplicación.

Los ejemplos mas sencillos de álgebras de Banach son $\mathbb{C}$, $C(K)$ con multiplicación de funciones (donde K es un espacio de Hausdorff compacto) y los operadores lineales acotados $\mathcal{L}(X)$ con composición (donde X es un espacio de Hilbert). Si por ejemplo $f \in C(K)$, entonces $\sigma(f) = f(K)$. Aquí el espectro de un elemento f es precisamente su imagen. Para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ el elemento $\mathrm{id}_K \in C(K)$ tiene K como espectro.

Ese tema está estudiado porque la información contenida en el espectro de un operador lineal acotado (o no acotado) en muchos casos es suficiente para hacer una construcción con el. Al mismo tiempo, restringirse a esa información reducida permite crear una teoría general que puede ser aplicada en todos los campos donde aparecen operadores lineales en espacios de Banach.

Una herramienta muy útil que surge de la teoría espectral es el *cálculo simbólico*. Eso significa que uno aplica funciones a elementos de álgebras de Banach, particularmente a operadores lineales. Informalmente, si $x \in A$ entonces se define para una función $f\colon \sigma(x) \to \mathbb{C}$ un elemento $f(x)$ de A. Eso se hace de tal manera que para $x \in A$ fijo, el mapeo $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras, $1 \mapsto e$ y $\mathrm{id}_{\sigma(x)} \mapsto x$. En consecuencia, las propiedades de las funciones $\sigma(x) \to \mathbb{C}$ se reflejan en las propiedades de sus imágenes en A bajo el cálculo simbólico. Recordando el ejemplo al inicio, el cálculo simbólico nos dará una interpretación del exponencial de un operador lineal en un espacio de Banach.

Veremos otro ejemplo: sea $x \in A$ fijo. Si existe un camino γ de 0 a un punto en la componente no acotada de $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ tal que $\gamma((0,1])\cap\sigma(x) = \varnothing$, entonces existe una función continua $f\colon \sigma(x) \mapsto \mathbb{C}$ tal que $f(\lambda)^2 = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$ o, en otras palabras, $f^2 = \mathrm{id}_{\sigma(x)}$ (una raíz cuadrada). Si está definido un cálculo simbólico en A que aplica a este x para mapeos continuos entonces existe $f(x) \in A$. La propiedad del homomorfismo dice que se cumple $f(x)^2 = x$ porque f es una raíz. Entonces $f(x)$ es una raíz cuadrada del elemento x. Para construirla uno sólo necesita tener suficiente información sobre el espectro de x.

Si no hay ese camino γ, todavía existe una raíz cuadrada $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ que no es continua. Su restricción a $\sigma(x)$ está en el álgebra de Banach $L^\infty(\sigma(x))$. Si existe un cálculo simbólico respecto a funciones en ese espacio que se puede aplicar a un elemento x entonces x todavía tiene raíz cuadrada. Eso demuestra que cuanto más grande el espacio de funciones admisibles en un cálculo simbólico, tanto mejores los resultados que uno puede obtener en los casos admisibles.

En un álgebra de Banach general primero definiremos un cálculo simbólico para funciones que son holomorfas en una vecindad de $\sigma(x)$. En B^*-álgebras y para los elementos x normales lo extenderemos a funciones que sólo son continuas en $\sigma(x)$. En el caso todavía mas especial del álgebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert, definiremos $f(x)$ para cualquier función $f \in L^\infty(\sigma(x))$ y x normal. Y al final, todavía en el álgebra de operadores acotados de un espacio de Hilbert, extenderemos ese resultado a funciones f que sólo son medibles. En esa situación se obtiene como imagen un operador no acotado en el espacio de Hilbert cuando la función no es acotada esencialmente, es decir, uno sale del álgebra con el cálculo simbólico.

Otro resultado básico de la teoría espectral es el *teorema espectral* para operadores lineales normales (acotados o no acotados) en un espacio de Hilbert X. En ese teorema un operador L está reconstruido de ciertas proyecciones ortogonales en X que son relacionadas con subconjuntos medibles del espectro. Informalmente, L está representado como un integral de la función $\mathrm{id}_{\sigma(L)}$ respecto a algo parecido a una medida de Borel en $\sigma(L)$ tomando proyecciones ortogonales como valores. Una aplicación muy importante del teorema espectral es el análisis espectral de operadores de Schrödinger.

1. Álgebras de Banach

1.1. Introducción

Todos espacios vectoriales son sobre el campo $\mathbb{C}$.

1.1 Definición. Un *álgebra* es un espacio vectorial A junto con una multiplicación interior $A \times A \to A$ que cumple

(I) $x(yz) = (xy)z$,

(II) $(x+y)z = xz + yz, \qquad x(y+z) = xy + xz,$

(III) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

para todo $x, y, z \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. En otras palabras, la multiplicación interior es un mapeo asociativo y bilineal.

Supongamos que además A es un espacio de Banach con norma que cumple

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|, \qquad \text{para todo } x, y \in A, \tag{1.1}$$

(en otras palabras, la multiplicación es acotada como mapeo bilineal) y que existe un elemento unitario e tal que

$$xe = ex = x, \qquad \text{para todo } x \in A, \tag{1.2}$$

(elemento neutral de la multiplicación) y

$$\|e\| = 1. \tag{1.3}$$

Entonces A es un *álgebra de Banach*.

1.2 Nota. (a) El elemento unitario es único.

(b) Si A es un álgebra compleja y un espacio de Banach que cumple (1.1) pero no existe un elemento unitario sea $A_1 := A \times \mathbb{C}$ el álgebra de Banach con multiplicación $(x, \alpha)(y, \beta) := (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$, norma $\|(x, \alpha)\|_1 := \|x\| + |\alpha|$ y elemento unitario $e := (0, 1)$. Entonces $A \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de codimensión 1 de A_1 y además un ideal de ambos lados.

(c) La multiplicación es continua: $x_i \to x$ y $y_i \to y$ implica $x_i y_i \to xy$ en A cuando $i \to \infty$.

Lo siguiente demostrará que propiedades (1.1) y (1.3) se obtienen mediante un cambio de norma bajo condiciones mas débiles.

1.3 Teorema. *Sea A un espacio de Banach que también es un álgebra con elemento unitario $e \neq 0$, donde la multiplicación es continua en la izquierda y en la derecha (es decir, $x_i \to x$ y $y_i \to y$ implica $x_i y \to xy$ y $xy_i \to xy$ en A cuando $i \to \infty$ para todo $x, y \in A$). Entonces existe una norma equivalente en A tal que con esta norma A es un álgebra de Banach.*

Demostración. Por continuidad en la derecha para todo $x \in A$ el mapeo $M(x)\colon A \to A$, $M(x)y := xy$, es un operador lineal acotado en A. Consideremos el mapeo $M\colon A \to \mathcal{B}(A)$ ($\mathcal{B}(A)$ es el espacio de los operadores lineales acotados en A) y pongamos $\widetilde{A} := M(A)$. Por las propiedades de la multiplicación en A el mapeo M es un homomorfismo de las álgebras A y $\widetilde{A}$. Si $M(x) = 0$ entonces $x = xe = M(x)e = 0$, es decir, M es un monomorfismo algebraico. Como

$$\|M^{-1}(M(x))\| = \|x\| = \|xe\| = \|M(x)e\| \leq \|M(x)\|\,\|e\|,$$

la inversa de M es continua entre el espacio normado $\widetilde{A}$ y el espacio de Banach A.

Demostremos que $\widetilde{A}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(A)$. Sean $(T_i) \subseteq \widetilde{A}$ y $T \in \mathcal{B}(A)$ tales que $T_i \to T$ en $\mathcal{B}(A)$. Denotemos $x_i := M^{-1}(T_i)$. Como $T_i(y) = x_i y = (x_i e)y = T_i(e)y$ y la multiplicación en A es continua por la izquierda,

$$T(y) = \lim_{i\to\infty} T_i(y) = \lim_{i\to\infty} T_i(e)y = T(e)y \qquad \text{para todo } y \in A.$$

En consecuencia, $T = M(T(e)) \in \widetilde{A}$ y $\widetilde{A}$ es cerrado.

El teorema de la aplicación abierta dice que M es un isomorfismo de los espacios de Banach A y $\widetilde{A}$. Por lo tanto, la nueva norma $\|x\|_1 := \|M(x)\|$ en A es equivalente a la norma original. Además, cumple

$$\|xy\|_1 = \|M(x)M(y)\| \leq \|M(x)\|\,\|M(y)\| = \|x\|_1\|y\|_1$$

y

$$\|e\|_1 = \|M(e)\| = \|I\| = 1,$$

es decir, A es un álgebra de Banach respecto a esta nueva norma. □

1.4 Ejemplos. (a) Sea K un espacio de Hausdorff compacto y no vacío. Entonces $C(K)$, el espacio de Banach de mapeos continuos $K \to \mathbb{C}$ con norma $\|\cdot\|_\infty$, es un álgebra (conmutativa) de Banach mediante la multiplicación de funciones. El elemento unitario es la función constante 1. Si K consiste de n puntos aislados, entonces $C(K)$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Particularmente, si $n = 1$ entonces $C(K) = \mathbb{C}$, el álgebra de Banach más sencilla, de dimensión 1, con el valor absoluto como norma.

(b) Sea $X \neq \{0\}$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$, el espacio de los operadores lineales acotados en X, junto con la composición de operadores como multiplicación interna, es un álgebra de Banach respecto a la norma de operadores usual y con el elemento unitario I, la identidad en X. Si $\dim X = n < \infty$ entonces $\mathcal{B}(X)$ es isomorfa al álgebra de las matrices $n \times n$ complejas. Si $\dim X > 1$ entonces $\mathcal{B}(X)$ no es conmutativo.

Toda subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(X)$ que contiene I es un álgebra de Banach. La demostración del Teorema 1.3 comprueba que todo álgebra de Banach es isomorfa a una de ese tipo.

(c) Sea K un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ y sea A la subálgebra de $C(K)$ que consiste de las funciones que son holomorfas en el interior de K. Entonces A es un subconjunto cerrado de $C(K)$ (por la formula integral de Cauchy), es decir, A es un álgebra de Banach.

(d) El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ con convolución

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

como multiplicación interior es un álgebra que cumple (1.1), pero no tiene un elemento unitario. El siguiente inciso explica come uno podría entender la completación abstracta mediante la Nota 1.2(b) de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a un álgebra de Banach.

(e) Sea $M(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Banach de las medidas complejas de Borel, donde la norma de μ es la variación $|\mu|(\mathbb{R}^n)$. Si $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ entonces la convolución $\mu * \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ se define mediante

$$(\mu * \nu)(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B-y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(B-x)d\mu(x).$$

Entonces $M(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach con la convolución como multiplicación interior y unidad δ, la medida de Dirac. El mapeo $L^1(\mathbb{R}^n) \to M(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto f\,dm_n$ (donde m_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) es un monomorfismo entre álgebras. La subálgebra de Banach de $M(\mathbb{R}^n)$ mas chica que contiene la imagen de $L^1(\mathbb{R}^n)$ bajo este monomorfismo es el espacio de medidas con representación $f\,dm_n + \lambda\delta$, donde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2. Homomorfismos complejos

Sea A un álgebra con elemento unitario e. Un homomorfismo (de álgebras) $\phi\colon A \to \mathbb{C}$ es un *homomorfismo complejo*. Un elemento x de A es *invertible* cuando existe un *inverso* x^{-1} de x en A, es decir, un elemento que cumple $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Un inverso siempre es único.

1.5 Proposición. *Sea $\phi \not\equiv 0$ un homomorfismo complejo en A. Entonces $\phi(e) = 1$ y $\phi(x) \neq 0$ para todo elemento invertible x en A.*

Demostración. Existe $y \in A$ tal que $\phi(y) \neq 0$. Como

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$$

se sigue que $\phi(e) = 1$. Si $x \in A$ es invertible entonces

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1,$$

es decir, $\phi(x) \neq 0$. □

1.6 Teorema. *Sea A un álgebra de Banach, $x \in A$ y $\|x\| < 1$. Entonces*

(a) *$e - x$ es invertible,*

(b) *$\|(e - x)^{-1} - (e + x)\| \leq \|x\|^2/(1 - \|x\|)$,*

(c) *$|\phi(x)| < 1$ para todo homomorfismo complejo ϕ en A.*

Demostración. Como $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ y $\|x\| < 1$ las sumas parciales

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^n$$

forman una sucesión de Cauchy en A. Como A es completo existe s en A tal que $s_n \to s$ cuando $n \to \infty$. Observamos que $x^n \to 0$,

$$s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$$

y la continuidad de la multiplicación implican que s es el inverso de $e - x$. Ahora

$$\|s - (e + x)\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

Finalmente, supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ cumple $|\lambda| \geq 1$. Por inciso (a) $e - \lambda^{-1}x$ es invertible y la Proposición 1.5 implica que

$$1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0,$$

es decir, $\phi(x) \neq \lambda$. □

1.3. Propiedades básicas de espectros

1.7 Definición. Sea A un álgebra de Banach. Denotemos por $G = G(A)$ el conjunto de los elementos invertibles de A. Si $x, y \in G$ entonces $y^{-1}x$ es el inverso de $x^{-1}y$, es decir, $x^{-1}y \in G$. Eso demuestra que G es un grupo respecto a la multiplicación en A.

Para $x \in A$ el *espectro* $\sigma(x)$ *de* x es el conjunto de números complejos λ tal que $\lambda e - x$ no es invertible. El complemento $\mathbb{C} \backslash \sigma(x)$ es el *conjunto resolvente de* x. El *radio espectral* de x es el número

$$\rho(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

1.8 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach, $x \in G(A)$ y $h \in A$ tal que $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Entonces $x + h \in G(A)$ y*

$$\|(x+h)^{-1} - (x^{-1} - x^{-1}hx^{-1})\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \tag{1.4}$$

Demostración. Como $x + h = x(e + x^{-1}h)$ y $\|x^{-1}h\| \leq \frac{1}{2}$ el Teorema 1.6 implica que $x + h \in G(A)$ y que

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - (x^{-1} - x^{-1}hx^{-1})\| &\leq \|(e + x^{-1}h)^{-1} - (e - x^{-1}h)\|\|x^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|x^{-1}\|^3\|h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|} \\ &\leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.\end{aligned}$$

□

1.9 Teorema. *Si A es un álgebra de Banach entonces $G(A)$ es un subconjunto abierto de A y el mapeo $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de $G(A)$ en $G(A)$.*

Demostración. Que $G(A)$ es abierto y que el mapeo $x \mapsto x^{-1}$ es continuo sigue del Teorema 1.8. Como $x \mapsto x^{-1}$ es suprayectivo y autoinverso, es un homeomorfismo. □

1.10 Repaso. Sean X un espacio de Banach, Q un espacio de Hausdorff compacto, $f\colon Q \to X$ continuo y μ una medida positiva de Borel en Q (es decir, μ tiene $[0, \infty)$ como codominio). Notamos que en este caso $\overline{\operatorname{conv} f(Q)}$ es compacto.

Entonces existe un y sólo un elemento

$$\int_Q f \, \mathrm{d}\mu \in X$$

(el *integral* de f respecto a μ) tal que

$$\int_Q (\Lambda f) \, \mathrm{d}\mu = \Lambda \left(\int_Q f \, \mathrm{d}\mu \right) \qquad \text{para todo } \Lambda \in X^*. \tag{1.5}$$

El integral está caracterizado por (1.5), es decir, cualquier propiedad de el sigue de (1.5). Se cumple

$$\left\| \int_Q f \, \mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.6}$$

Si además $\mu(Q) = 1$, entonces

$$\int_Q f \, \mathrm{d}\mu \in \overline{\operatorname{conv} f(Q)}. \tag{1.7}$$

1.11 Repaso. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y X un espacio de Banach. Un mapeo $f\colon \Omega \to X$ es *holomorfo débilmente* cuando para todo $\Lambda \in X^*$ el mapeo $\Lambda f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfo. El mapeo f es *holomorfo fuertemente* cuando el límite

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existe respecto a la norma en X para todo $z \in \Omega$. Un mapeo holomorfo débilmente es continuo y holomorfo fuertemente. Se cumplen las usuales formulas integrales de Cauchy respecto al integral definido en el Repaso 1.10.

1.12 Teorema. *Si A es un álgebra de Banach y $x \in A$ entonces*

(a) *el espectro $\sigma(x)$ es compacto y no vacío,*

(b) *el radio espectral de x cumple*

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}. \tag{1.8}$$

Esta es la formula del radio espectral.

Demostración. Si $|\lambda| > \|x\|$ entonces $e - \lambda^{-1}x$ es invertible por el Teorema 1.6, y también $\lambda e - x$. Entonces $\lambda \notin \sigma(x)$, es decir, se cumple

$$\rho(x) \leq \|x\| \tag{1.9}$$

y $\sigma(x)$ es acotado. Para demostrar que $\sigma(x)$ es cerrado definimos $g\colon \mathbb{C} \to A$ por $g(\lambda) := \lambda e - x$. Entonces g es continuo y el conjunto resolvente Ω de x es $g^{-1}(G(A))$, un conjunto abierto por el Teorema 1.9 y la continuidad de g. Eso implica que $\sigma(x)$ es cerrado.

Definimos $f\colon \Omega \to G(A)$ por $f(\lambda) := (\lambda e - x)^{-1}$ (la *resolvente* de x). Sean $\lambda, \mu \in \Omega$ tal que $|\lambda - \mu| \leq \frac{1}{2}\|f(\lambda)\|^{-1}$. Entonces el Teorema 1.8 implica (reemplazando x por $\lambda e - x$ y h por $(\mu - \lambda)e$)

$$\begin{aligned}
&\|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda) f^2(\lambda)\| \\
&\qquad = \|((\lambda e - x) + (\mu - \lambda)e)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-2}\| \\
&\qquad \leq 2\|f(\lambda)\|^3 |\mu - \lambda|^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} = -f^2(\lambda) \qquad \text{para todo } \lambda\in\Omega, \tag{1.10}$$

es decir, f es holomorfo fuertemente.

Como en la prueba del Teorema 1.6 se obtiene que la serie

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}x^k \tag{1.11}$$

converge uniformemente para λ en un circulo Γ_r con centro 0 y radio $r > \|x\|$. En seguida (1.6) comprueba que podemos integrar la serie término por término para obtener

$$x^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{1.12}$$

Si $\sigma(x)$ fuera vacío, todos esos integrales serian 0 porque $\lambda^n f(\lambda)$ sería holomorfo en todo $\mathbb{C}$. Pero para $n=0$ eso diría que $e=0$, una contradicción. Entonces $\sigma(x)\neq\varnothing$.

El teorema de Cauchy implica que (1.12) todavía vale cuando solamente $r>\rho(x)$ porque si $r_1 > \|x\|$ y $r_2 > \rho(x)$ entonces $\Gamma_{r_1}-\Gamma_{r_2}$ es un ciclo que tiene número de giro 0 en el complemento de Ω. Pongamos

$$M(r) := \max_{\theta\in\mathbb{R}} \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\| \qquad \text{para } r>\rho(x).$$

Como f es continuo, $M(r)<\infty$ para todo $r>\rho(x)$. Por (1.12) obtenemos

$$\|x^n\| \le r^{n+1}\frac{M(r)}{2\pi},$$

y en consecuencia

$$\limsup_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} \le r \qquad \text{para todo } r>\rho(x).$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} \le \rho(x). \tag{1.13}$$

Por otro lado, sea $\lambda\in\sigma(x)$. Entonces $\lambda^n e - x^n$ no es invertible porque

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

y un elemento invertible no puede tener un elemento no invertible como uno de dos factores que conmutan (véase la Tarea 1). En seguida, $\lambda^n\in\sigma(x^n)$ y (1.9) implica que $|\lambda^n|\le\|x^n\|$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lambda\le\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x^n\|^{1/n}$ para todo $\lambda\in\sigma(x)$, es decir,

$$\rho(x)\le\inf_{n\in\mathbb{N}}\|x^n\|^{1/n}. \tag{1.14}$$

Considerando (1.13) y (1.14) obtenemos (1.8) y termina la demostración. □

1.13 Teorema (Gelfand y Mazur)**.** *Si A es un álgebra de Banach donde todo elemento no cero es invertible, entonces A es isomorfo isométricamente a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sean $x \in A$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces por lo mas uno de $\lambda_1 e - x$ y $\lambda_2 e - x$ es cero, es decir, por lo menos uno de ellos es invertible. Eso implica que $\sigma(x)$, no siendo vacío, consiste precisamente de un punto que llamaremos $\lambda(x)$. Como $\lambda(x)e - x$ no es invertible, es cero, es decir, $x = \lambda(x)e$. Esa identidad implica que λ es un isomorfismo algebraico de A y $\mathbb{C}$. Como $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$, λ es isométrico. □

El espectro de un elemento x de un álgebra de Banach A es un objeto puro algebraico, y lo mismo es cierto para el radio espectral de x porque está definido en términos del espectro. Por otro lado, la fórmula del radio espectral lo relaciona con la norma de las potencias de x, es decir, con propiedades métricas.

Si A es una subálgebra de un álgebra de Banach B entonces un elemento de A que no es invertible en A puede ser invertible en el álgebra mas grande B. Entonces los espectros $\sigma_A(x)$ y $\sigma_B(x)$ pueden ser diferentes. De todos modos se cumple $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$. Por otro lado, el radio espectral solo depende de las normas de potencias de x, que no están influenciados de lo que pasa afuera de A. Entonces $\rho_A(x) = \rho_B(x)$. Describiremos con mas detalle la relación de $\sigma_A(x)$ y $\sigma_B(x)$.

1.14 Lema. *sean V, W conjuntos abiertos en un espacio topológico X que cumplen con $V \subseteq W$, W contiene no punto de la frontera de V. Entonces V es una unión de componentes conexas de W.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $\Omega \subseteq V$ cuando Ω es una componente conexa de W y $\Omega \cap V \neq \varnothing$. Entonces sea eso el caso. Denotemos por U el complemento de $\overline{V}$. Como W no contiene ningún punte de la frontera de V, Ω es la unión de los conjuntos abiertos ajenos $\Omega \cap V$ y $\Omega \cap U$. Como Ω es conexo, $\Omega \cap U = \varnothing$, es decir, $\Omega = \Omega \cap V \subseteq V$. □

1.15 Lema. *Sean A un álgebra de Banach, $(x_n) \subseteq G(A)$ y $x \in \partial G(A)$ tal que $x_n \to x$ en A cuando $n \to \infty$. Entonces $\|x_n^{-1}\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Si no fuera cierta la conclusión entonces existiría $M < \infty$ tal que $\|x_n^{-1}\| \leq M$ para un número infinito de índices n. Sea n uno de esos índices tal que $\|x_n - x\| < 1/M$. En seguida,

$$\|e - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| < 1,$$

es decir, $x_n^{-1}x \in G(A)$ por el Teorema 1.6. Como $x = x_n(x_n^{-1}x)$ y $G(A)$ es un grupo, $x \in G(A)$. ¡Contradicción con que $G(A)$ es abierto! □

1.16 Teorema. (a) *Si A es un álgebra cerrada de un álgebra de Banach B y si A contiene el elemento unitario de B entonces $G(A)$ es la unión de ciertas componentes conexas de $A \cap G(B)$.*

(b) *Bajo esas condiciones, para cualquier $x \in A$ el espectro $\sigma_A(x)$ es la unión de $\sigma_B(x)$ con una colección (posiblemente vacía) de componentes acotadas de $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$. Particularmente, $\partial\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.*

Demostración. **Inciso (a):** Si $x \in G(A)$ entonces x tiene la misma inversa en B, es decir, $G(A) \subseteq G(B)$. Ambos conjuntos $G(A)$ y $A \cap G(B)$ son abiertos en A. Por el Lema 1.14 es suficiente demostrar que $\partial G(A) \cap G(B) = \varnothing$.

Sea $y \in \partial G(A)$. Existe $(x_n) \subseteq G(A)$ tal que $x_n \to y$. Por el Lema 1.15 $\|x_n^{-1}\| \to \infty$. Si y estuviera en $G(B)$ entonces la continuidad de la inversión en $G(B)$ implicaría que $\|x_n^{-1}\| \to \|y^{-1}\|$, una contradicción. Por lo tanto, $y \notin G(B)$. Eso prueba (a).

Inciso (b): Sean $\Omega_A := \mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$ y $\Omega_B := \mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$. Entonces Ω_A y Ω_B son abiertos. Como $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$, $\Omega_A \subseteq \Omega_B$. Sea $\lambda \in \partial\Omega_A$. Entonces $\lambda \in \sigma_A(x)$ y existe $(\lambda_n) \subseteq \Omega_A$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Se sigue que $\lambda_n e - x \in G(A)$, $\lambda e - x \notin G(A)$ y $\lambda_n e - x \to \lambda e - x$, es decir, $\lambda e - x \in \partial G(A)$. Como ya demostramos en el inciso (a), $\lambda e - x \notin G(B)$ y por tanto $\lambda \notin \Omega_B$. Ahora el Lema 1.14 implica que Ω_A es la unión de componentes conexas de Ω_B. Las otras componentes de Ω_B son subconjuntos de $\sigma_A(x)$. Eso prueba (b). $\square$

1.17 Corolario. *Si $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$ es conexo entonces $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

La condición del corolario anterior se cumple por ejemplo cuando $\sigma_B(x) \subseteq \mathbb{R}$.

1.18 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach, $x \in A$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $\sigma(x) \subseteq \Omega$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x+y) \subseteq \Omega$ cuando $y \in A$ cumple $\|y\| \leq \delta$.*

Demostración. Como $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ es una función continua de λ en $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ y como ella tiende a 0 cuando $\lambda \to \infty$, existe $M < \infty$ tal que

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| < M \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

Si $y \in A$ cumple $\|y\| < 1/M$ y si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ entonces

$$\lambda e - (x+y) = (\lambda e - x)\Big(e - (\lambda e - x)^{-1} y\Big)$$

es invertible en A por el Teorema 1.6 y porque $\|(\lambda e - x)^{-1} y\| < 1$. En seguida, $\lambda \notin \sigma(x+y)$. Hemos demostrado que $\sigma(x+y) \subseteq \Omega$ y terminamos la demostración poniendo $\delta := 1/M$. $\square$

1.4. Cálculo simbólico

Sea A un álgebra de Banach. Recordemos que un cálculo simbólico es un mapeo $f \mapsto f(x) \in A$ para ciertas funciones f y ciertos elementos $x \in A$. Pedimos de un cálculo simbólico que para x fijo el mapeo $f \mapsto f(x)$ sea un homomorfismo de álgebras, que $1 \mapsto e$ y que $\mathrm{id} \mapsto x$.

La forma necesaria y natural de un cálculo simbólico para polinomios y funciones racionales es reemplazar la variable compleja por el elemento x. A esa regla se puede dar sentido siempre cuando la función es holomorfa en una vecindad de $\sigma(x)$ (es decir, $\sigma(x)$ no contiene ningún polo de la función). Similarmente, si f es una función entera con la serie de potencias $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, es natural definir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

porque la serie converge para todo $x \in A$. Eso sigue como en la demostración del Teorema 1.6.

En esta sección definiremos $f(x)$ cuando $x \in A$ y cuando f es holomorfo en una vecindad de $\sigma(x)$. En vez de series de potencias o series de Laurent utilizaremos una formula de Cauchy para funciones que toman valores en A.

1.19 Repaso. Sean X un espacio de Banach, Q un espacio de Hausdorff compacto, $f\colon Q \to X$ continuo y μ una medida real de Borel en Q. La descomposición de Jordan de μ consiste de dos medidas positivas $\mu^{\pm}$ tal que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Se define el integral mediante el Repaso 1.10 por

$$\int_Q f \,\mathrm{d}\mu := \int_Q f \,\mathrm{d}\mu^+ - \int_Q f \,\mathrm{d}\mu^-. \tag{1.15}$$

Similarmente, si μ es una medida compleja, entonces se define

$$\int_Q f \,\mathrm{d}\mu := \int_Q f \,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu) + \mathrm{i}\int_Q f \,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu). \tag{1.16}$$

Esta noción mas general de la integral también tiene la caracterización (1.5).

1.20 Lema. *Sean A un álgebra de Banach, Q un espacio compacto de Hausdorff, μ una medida compleja de Borel en Q y $f\colon Q \to A$ continua. Entonces para cualquier $x \in A$ las funciones $q \mapsto xf(q)$ y $q \mapsto f(q)x$ son continuas de Q en A y se tiene*

$$x\int_Q f \,\mathrm{d}\mu = \int_Q xf \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{y} \qquad \Big(\int_Q f \,\mathrm{d}\mu\Big)x = \int_Q fx \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.17}$$

Demostración. La continuidad de xf y fx es obvia de la continuidad de la multiplicación en A. Sea $x \in A$ fijo y sea $M \in \mathcal{L}(A)$ dado por $My := xy$ para todo $y \in A$. Para cualquier $\Lambda \in A^*$ se sigue que $\Lambda M \in A^*$. La caracterización del integral implica

$$\Lambda\Big(x\int_Q f \,\mathrm{d}\mu\Big) = \Lambda M \int_Q f \,\mathrm{d}\mu = \int_Q \Lambda M f \,\mathrm{d}\mu = \Lambda\int_Q Mf \,\mathrm{d}\mu = \Lambda\int_Q xf \,\mathrm{d}\mu.$$

Como Λ fue arbitrario eso dice que la primera identidad en (1.17) es cierta. La otra sigue similarmente. $\square$

1.21 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \Omega$ compacto. Decimos que un ciclo Γ *rodea* K *en* Ω cuando el número de giro cumple

$$\operatorname{índ}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda - z} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } z \in K \\ 0 & \text{cuando } z \in \mathbb{C}\backslash\Omega. \end{cases}$$

1.22 Nota. Sean Ω, K como en la Definición 1.21 y sea Γ un ciclo que rodea K en Ω. Para toda función holomorfa $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ entonces se cumplen

$$\int_\Gamma f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0 \tag{1.18}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda - z)^{-1} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{para todo } z \in K. \tag{1.19}$$

Utilizaremos (1.19) para definir un cálculo simbólico. La idea es reemplazar z por elementos x en un álgebra de Banach. Para eso necesitaremos requerir que f sea holomorfo en una vecindad de $\sigma(x)$ y que Γ rodee $\sigma(x)$ en esa vecindad.

1.23 Lema. *Sean A un álgebra de Banach, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{\alpha\}$ y Γ un ciclo rodeando $\sigma(x)$ en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = (\alpha e - x)^n \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.20}$$

Demostración. La integral en (1.20) está bien definida porque λ sólo toma valores en $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ en el integrando. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ tenemos

$$e = (\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x) + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}$$

y entonces

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}. \tag{1.21}$$

Sea $y_n \in A$ el valor de la integral en (1.20). Por la Nota 1.22 y porque $(\alpha - \lambda)^n$ es una función holomorfa en $\lambda \in \Omega$ se sigue que

$$\int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n (\alpha e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = (\alpha e - x)^{-1} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n\,\mathrm{d}\lambda = 0. \tag{1.22}$$

Juntando (1.21) y (1.22) obtenemos con el Lema 1.20

$$(\alpha e - x) y_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = y_{n+1}$$

y luego

$$y_n = (\alpha e - x)^n y_0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces falta demostrar que

$$y_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda = e. \tag{1.23}$$

Sea Γ_r un circulo de orientación positiva, con centro 0 y radio $r > \|x\|$. En Γ_r se tiene

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Como la serie converge uniformemente en Γ_r y como

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \lambda^{-n-1} \,\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} (\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \lambda^{-n-1} x^n \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_r} \lambda^{-n-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= e. \end{aligned}$$

Observemos que $\Gamma' := \Gamma - \Gamma_r$ es un ciclo en $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ que cumple $\operatorname{índ}_{\Gamma'}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$. Como $(\lambda e - x)^{-1}$ es holomorfo en $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ (véase (1.10)) eso implica que

$$\int_{\Gamma'} (\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

es decir, (1.23) se cumple. □

Como corolario de ese lema obtenemos

1.24 Teorema. *Sea $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función racional con polos $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ y coeficientes $c_{k,\ell}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\ell = 1, 2, \dots, n$, tal que con un polinomio P se cumple*

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{k,\ell} c_{k,\ell} (\lambda - \alpha_k)^{-\ell}. \tag{1.24}$$

Si A es un álgebra de Banach y si $x \in A$ cumple que $\sigma(x)$ no contiene ningún polo de R, entonces definimos

$$R(x) := P(x) + \sum_{k,\ell} c_{k,\ell} (x - \alpha_k e)^{-\ell}. \tag{1.25}$$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, contiene $\sigma(x)$, es tal que R es holomorfo en Ω, y si Γ es un ciclo rodeando $\sigma(x)$ en Ω, entonces

$$R(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{1.26}$$

1.25 Nota. El teorema demuestra que la definición natural de una función racional de un elemento de un álgebra de Banach también puede ser efectuada por la fórmula de Cauchy.

1.26 Definición. Sean A un álgebra de Banach, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $H(\Omega)$ el álgebra de funciones holomorfas en Ω. Entonces

$$A_\Omega := \{x \in A \mid \sigma(x) \subseteq \Omega\}$$

es un subconjunto abierto de A por el Teorema 1.18.

Definimos $\widetilde{H}(A_\Omega)$ como el conjunto de funciones $\tilde{f} \colon A_\Omega \to A$ que están obtenidas de un $f \in H(\Omega)$ por la fórmula

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda, \tag{1.27}$$

donde Γ es un ciclo que rodea $\sigma(x)$ en Ω.

1.27 Nota. (a) La integral en (1.27) está bien definida porque Γ no toca a $\sigma(x)$ y porque

$$\lambda \mapsto f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} \tag{1.28}$$

es un mapeo continuo en $\Omega \backslash \sigma(x)$.

(b) El mapeo (1.28) además es holomorfo por (1.10) y porque un producto de mapeos holomorfos es holomorfo. Entonces la integral en (1.27) no depende de Γ mientras que Γ es un ciclo rodeando a $\sigma(x)$ en Ω.

(c) Definimos $X := \{\alpha e \mid \alpha \in \Omega\} = \Omega e$. Entonces $X = A_\Omega \cap \mathbb{C}e$ porque $\sigma(\alpha e) = \{\alpha\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha e \in X$ y $f \in H(\Omega)$ entonces $\tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e$. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{C}e$ y luego Ω con X podemos también identificar f con $\tilde{f}|_X$. Eso nos deja entender $\tilde{f}$ como una extensión de f a A_Ω.

(d) El conjunto $\widetilde{H}(A_\Omega)$ es un álgebra naturalmente cuando uno usa las operaciones en puntos, como es usual.

(e) Si $x_n \to x$ en A_Ω, entonces mostremos que $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x)$ en A: sea Γ un ciclo que rodea x en Ω. Por el Teorema 1.18 Γ también rodea $\sigma(x_n)$ para n suficientemente grande. Ponemos

$$M := \max_{\lambda \in \Gamma} \|(\lambda e - x)^{-1}\|.$$

Se sigue como en la demostración del Teorema 1.6(b) que

$$\begin{aligned}\|(\lambda e - x_n)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1}\| &= \|(\lambda e - x)^{-1}\| \, \|(e + (\lambda e - x)^{-1}(x - x_n))^{-1} - e\| \\ &\leq \frac{\|(\lambda e - x)^{-1}\|^2 \|x - x_n\|}{1 - \|(\lambda e - x)^{-1}\| \|x - x_n\|} \\ &\leq \frac{M^2 \|x - x_n\|}{1 - M\|x - x_n\|} \\ &\to 0\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, uniformemente en $\lambda \in \Gamma$. Ahora la definición de $\tilde{f}(x_n)$ y $\tilde{f}(x)$ en (1.27) implica el enunciado.

1.28 Teorema. *Sean A, $H(\Omega)$ y $\widetilde{H}(A_\Omega)$ como en la Definición* 1.26*. Entonces el mapeo $H(\Omega) \mapsto \widetilde{H}(A_\Omega)$, $f \mapsto \tilde{f}$, es un isomorfismo de álgebras que es continuo en el sentido siguiente: Si $(f_n) \subseteq H(\Omega)$ y si $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, entonces*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Ese isomorfismo cumple $\tilde{1}(x) = e$ y $\widetilde{\mathrm{id}}(x) = x$ para todo $x \in A_\Omega$. Además, $\widetilde{H}(A_\Omega)$ es un álgebra conmutativo.

1.29 Nota. (a) El Teorema 1.28 dice que la Definición 1.26 define un cálculo simbólico.

(b) El límite f de la sucesión (f_n) es holomorfo por el teorema de Morera.

Demostración del Teorema 1.28. El último enunciado es una consecuencia del Teorema 1.24. La representación de $\tilde{f}$ en (1.27) implica que el mapeo $f \mapsto \tilde{f}$ es lineal. Si $\tilde{f} = 0$, entonces para todo $\alpha \in \Omega$ se tiene por la Nota 1.27(c) que $0 = \tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e$, es decir, $f(\alpha) = 0$. Entonces $f \mapsto \tilde{f}$ es biyectivo.

Para demostrar la continuidad, supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, para $(f_n) \subseteq H(\Omega)$. Sean $x \in A_\Omega$ y Γ un ciclo rodeando $\sigma(x)$ en Ω. El mapeo $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$ es continuo en $\Omega \backslash \sigma(x)$. En consecuencia, $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ es acotada en Γ. Con (1.6) obtenemos

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)\| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\Gamma} \Big(\|f(z) - f_n(z)\| \cdot \|(ze - x)^{-1}\|\Big) \int_\Gamma \mathrm{d}\lambda \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Para demostrar que $f \mapsto \tilde{f}$ es multiplicativo, sean $f, g \in H(\Omega)$ y $h := fg$. Entonces $h \in H(\Omega)$ y tenemos que demostrar que

$$\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \qquad \text{para todo } x \in A_\Omega. \tag{1.29}$$

Si f y g son racionales entonces h es racional y el Teorema 1.24 implica (1.29). En el caso general sean $f_n, g_n \in H(\Omega)$ funciones racionales tal que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en subconjuntos compactos de Ω. Aquellas sucesiones aproximantes existen por el teorema de aproximación de Runge. En seguida, $f_n g_n$ converge a h en el mismo modo. La multiplicatividad del mapeo $f \mapsto \tilde{f}$ para funciones racionales y su continuidad dan (1.29).

Finalmente, la conmutatividad de $\widetilde{H}(A_\Omega)$ es una consecuencia de su definición y de la conmutatividad de $H(\Omega)$. $\square$

1.30 Teorema. *En la situación del Teorema* 1.28*, supóngase que* $x \in A_\Omega$ *y* $f \in H(\Omega)$*. Entonces se cumplen:*

(a) $\tilde{f}(x)$ *es invertible en* A *si y sólo si* $f(\lambda) \neq 0$ *para todo* $\lambda \in \sigma(x)$*.*

(b) $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$*. Este inciso es el* teorema de la aplicación espectral*.*

Demostración. **Inciso (a):** Si f no tiene ningún cero en $\sigma(x)$ entonces $g := 1/f$ es holomorfo en una vecindad abierta $\Omega_1 \subseteq \Omega$ de $\sigma(x)$. Como $fg = 1$ en Ω_1, el Teorema 1.28 dice (reemplazando Ω por Ω_1) que $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$, es decir, $\tilde{f}(x)$ es invertible. Por otro lado, si $f(\alpha) = 0$ para un $\alpha \in \sigma(x)$, entonces existe $h \in H(\Omega)$ tal que

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \qquad \text{para todo } \lambda \in \Omega.$$

En seguida

$$(x - \alpha e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e). \tag{1.30}$$

Como $(x - \alpha e)$ no es invertible en A, tampoco es $\tilde{f}(x)$ (véase la Tarea Nº 1).

Inciso (b): Sea $\beta \in \mathbb{C}$. Por definición, $\beta \in \sigma(\tilde{f}(x))$ si y sólo si $\tilde{f}(x) - \beta e$ no es invertible en A. Por el inciso (a) eso es el caso si y sólo si $f - \beta$ tiene un cero en $\sigma(x)$, es decir, cuando $\beta \in f(\sigma(x))$. $\square$

1.31 Teorema. *Sean* $x \in A_\Omega$*,* $f \in H(\Omega)$*,* Ω_1 *un conjunto abierto que contiene* $f(\sigma(x))$*,* $g \in H(\Omega_1)$ *y* $\Omega_0 := f^{-1}(\Omega_1)$*. Entonces* $g \circ f \in H(\Omega_0)$*,* $\tilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$ *y* $\widetilde{g \circ f}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$*.*

Demostración. Por inciso (b) del Teorema 1.30 $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \subseteq \Omega_1$ y $\tilde{g}(\tilde{f}(x))$ está bien definido. Fijamos un ciclo Γ_1 que rodea $f(\sigma(x))$ en Ω_1. Entonces existe un conjunto abierto U tal que $f(\sigma(x)) \subseteq U \subseteq \Omega_1$, $U \cap |\Gamma_1| = \varnothing$ y tan pequeño que

$$\operatorname{índ}_{\Gamma_1}(\lambda) = 1 \qquad \text{para todo } \lambda \in U. \tag{1.31}$$

Pongamos $V := f^{-1}(U)$ y fijamos un ciclo Γ_0 que rodea $\sigma(x)$ en V. Si $\zeta \in \Gamma_1$ entonces $1/(\zeta - f) \in H(V)$ y el Teorema 1.28 con V en lugar de Ω demuestra que

$$(\zeta e - \tilde{f}(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} (\zeta - f(\lambda))^{-1}(\lambda e - x)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda \qquad \text{para todo } \zeta \in \Gamma_1. \tag{1.32}$$

Como Γ_1 rodea $f(\sigma(x)) = \sigma(\tilde{f}(x))$ en Ω_1 las ecuaciones (1.31) y (1.32) implican que $\operatorname{índ}_{\Gamma_1}(f(\lambda))$ para todo $\lambda \in V$ y en seguida que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{f}(x)) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)(\zeta e - \tilde{f}(x))^{-1} \,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} (\zeta - f(\lambda))^{-1} (\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)(\zeta - f(\lambda))^{-1} \,\mathrm{d}\zeta (\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \widetilde{g \circ f}(x).
\end{aligned}$$

□

1.32 Definición. Sean A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x = y^n$ entonces y es una *n-ésima raíz de x*. Si $x = \exp(y)$ entonces y es un *logaritmo de x*.

1.33 Nota. La exponencial en la definición anterior puede ser definida mediante la series de potencias o mediante la formula integral (1.27). La continuidad del cálculo simbólico del Teorema 1.28 implica que esas definiciones coinciden. Lo mismo aplica a toda función entera.

1.34 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Entonces Ω es *simplemente conexo* cuando sucede lo siguiente: Sean A_1 y A_2 cerrados y ajenos tal que $A_1 \cup A_2 = \mathbb{C}\backslash\Omega$. Si uno de esos conjuntos es compacto entonces es vacío.

1.35 Nota. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Entonces Ω es simplemente conexo si y sólo si para todo ciclo Γ en Ω y todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ se cumple $\operatorname{índ}_\Gamma(\lambda) = 0$ (es decir, Γ es *cero homologo en* Ω).

1.36 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach y $x \in A$ tal que $\sigma(x)$ no separa 0 de ∞ (es decir, 0 y ∞ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$). Entonces se cumplen:*

(a) *x tiene raíces de todos órdenes,*

(b) *x tiene un logaritmo en A y*

(c) *Si $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio P tal que $\|x^{-1} - P(x)\| \leq \varepsilon$.*

Además, si $\sigma(x) \subseteq (0, \infty)$ entonces las raíces en (a) *pueden ser escogidas tal que lo mismo se cumple para sus espectros.*

Demostración. Por hipótesis 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. Como $\mathbb{C}$ es localmente arcoconexo existe un mapeo continuo $\gamma\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ tal que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Pongamos $\Omega := \mathbb{C}\backslash\gamma([0, \infty))$. Como $\gamma([0, \infty))$ es un conjunto cerrado y conexo Ω es una vecindad abierta de $\sigma(x)$ que no contiene cero y que es simplemente conexa. Existe un logaritmo f en Ω: f es holomorfa en Ω y tal que $\exp(f(\lambda)) = \lambda$ para todo $\lambda \in \Omega$. Por tanto el Teorema 1.31 dice que $\exp(\tilde{f}(x)) = x$ y que $y := \tilde{f}(x)$ es un logaritmo de x. Si $\sigma(x) \subseteq (0, \infty)$ entonces uno puede escoger una rama del logaritmo para f que toma valores reales en $\sigma(x)$. En ese caso se sigue que $\sigma(y) \subseteq \mathbb{R}$, por el teorema de la aplicación espectral. Eso demuestra el inciso (b).

Para demostrar el inciso (a) sea $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $z := \exp(y/n)$. Así se cumple $z^n = x$, es decir, z es una n-ésima raíz de x. Si $\sigma(x) \subseteq (0, \infty)$ entonces lo anterior dice que $\sigma(y) \subseteq \mathbb{R}$ y $\sigma(z) \subseteq (0, \infty)$, otra vez por el teorema de la aplicación espectral.

Sea $g(\lambda) := 1/\lambda$. Como Ω es simplemente conexo y no contiene cero, un caso especial del teorema de Runge implica que existe una sucesión (p_n) de polinomios tal que $p_n \to g$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Por la continuidad del cálculo simbólico, $\widetilde{p_n}(x) \to \tilde{g}(x) = x^{-1}$. Eso demuestra (c). □

1.37 Nota. El espectro de una matriz compleja invertible consiste de un número finito de puntos distintos a cero. Entonces el conjunto resolvente es conexo y tal matriz siempre tiene un logaritmo y todas raíces.

1.38 Teorema. (a) *Sean A un álgebra de Banach, $x \in A$, P un polinomio en una variable, y $P(x) = 0$. Entonces $\sigma(x)$ consiste de ceros de P.*

(b) *Particularmente, si x es idempotente, entonces $\sigma(x) \subseteq \{0, 1\}$.*

(c) *Si el espectro de un elemento x de A no es conexo, entonces A contiene un idempotente no trivial (es decir, un elemento y tal que $y^2 = y$, $y \neq 0$ y $y \neq e$).*

Demostración. El teorema de la aplicación espectral (Teorema 1.30) implica que

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\},$$

es decir, incisos (a) y (b). Si $\sigma(x)$ no es conexo, entonces existen conjuntos ajenos abiertos Ω_0 y Ω_1 tal que ambos atraviesan $\sigma(x)$ y tal que $\sigma(x) \subseteq \Omega := \Omega_0 \cup \Omega_1$. Definimos $f \equiv 0$ en Ω_0 y $f \equiv 1$ en Ω_1. Entonces $f \in H(\Omega)$ y $f^2 = f$. Poniendo $y := \tilde{f}(x)$ el cálculo simbólico implica que $y^2 = y$. El teorema de la aplicación espectral dice que

$$\sigma(y) = f(\sigma(x)) = \{0, 1\}.$$

Por tanto, $y \neq 0$ y $y \neq e$. □

1.39 Definición. Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces el *espectro punto* $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ *de* T es el conjunto de los valores propios de T. Mas explícitamente, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ si y sólo si el núcleo $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ de $\lambda I - T$ tiene dimensión positiva. Obviamente $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T)$.

1.40 Teorema. *Sean X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $\sigma(T) \subseteq \Omega$ y $f \in H(\Omega)$. Entonces se cumplen:*

(a) *Si* $x \in X$, $\alpha \in \Omega$ *y* $Tx = \alpha x$, *entonces* $\tilde{f}(T)x = f(\alpha)x$.

(b) $f(\sigma_{\mathrm{p}}(T)) \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{f}(T))$.

(c) *Si* $\alpha \in \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{f}(T))$ *y* $f - \alpha$ *no es cero idénticamente en ninguna componente conexa de* Ω *entonces* $\alpha \in f(\sigma_{\mathrm{p}}(T))$.

(d) *Si* f *no es constante en ninguna componente conexa de* Ω *entonces* $f(\sigma_{\mathrm{p}}(T)) = \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{f}(T))$.

Demostración. Sea $x \neq 0$ tal que $Tx = \alpha x$ (si $x = 0$, entonces no hay nada que demostrar). Entonces $\alpha \in \sigma(T)$ y existe $g \in H(\Omega)$ tal que

$$f(\lambda) - f(\alpha) = g(\lambda)(\lambda - \alpha) \qquad \text{para todo } \lambda \in \Omega.$$

El cálculo simbólico implica que

$$\tilde{f}(T) - f(\alpha)I = \tilde{g}(T)(T - \alpha I).$$

Como $(T - \alpha I)x = 0$ eso demuestra el inciso (a). El inciso (b) es una consecuencia de (a).

Demostremos el inciso (c). Primero notemos que

$$\alpha \in \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{f}(T)) \subseteq \sigma(\tilde{f}(T)) = f(\sigma(T))$$

y entonces $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T)$ no es vacío.

Veremos que ese conjunto es finito. Si (λ_n) es una sucesión de elementos distintos en $f^{-1}(\lambda) \cap \sigma(T)$ entonces podemos pasar a una subsucesión convergente porque $\sigma(T)$ es compacto, es decir, $\lambda_n \to \lambda^*$ para algún $\lambda^* \in \sigma(T)$. Entonces λ^* es un punto de agregación de ceros de $f - \alpha$. Por la holomorfía de $f - \alpha$ eso implica que $f - \alpha \equiv 0$ en la componente conexa de Ω que contiene al punto λ^*, en contradicción con las hipótesis.

Sean $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ los ceros de $f - \alpha$ en $\sigma(T)$, repetidas según sus multiplicidades. Entonces

$$f(\lambda) - \alpha = g(\lambda)(\lambda - \zeta_1)(\lambda - \zeta_2) \cdots (\lambda - \zeta_n)$$

con una función $g \in H(\Omega)$ que no tiene cero en $\sigma(T)$. El cálculo simbólico implica que

$$\tilde{f}(T) - \alpha I = \tilde{g}(T)(T - \zeta_1 I)(T - \zeta_2 I) \cdots (T - \zeta_n I).$$

Por el Teorema 1.30(a) $\tilde{g}(T)$ es invertible, es decir, inyectivo. Como $\alpha \in \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{f}(T))$ el mapeo $\tilde{f}(T) - \alpha I$ no es inyectivo. Esos dos hechos demuestran que uno de los mapeos $(T - \zeta_k I)$ debe de ser no inyectivo y $\zeta_k \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Como $f(\zeta_k) = \alpha$, eso implica que $\alpha \in f(\sigma_{\mathrm{p}}(T))$.

El inciso (d) es una consecuencia inmediata de (b) y (c). □

1.5. El grupo de los elementos invertibles

Sea A un álgebra de Banach. Analizaremos el grupo $G := G(A)$ de los elementos invertibles de A. G es un grupo topológico porque multiplicación e inversión son continuas.

La definición de la función exponencial en A por una serie de potencias implica que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \text{cuando } x, y \in A \text{ y } xy = yx. \tag{1.33}$$

En consecuencia, el conjunto $\exp(A) := \{\exp(x) \mid x \in A\}$ es un subconjunto de G porque $\exp(x)\exp(-x) = \exp(-x)\exp(x) = \exp(0) = e$ para todo $x \in A$.

Sea G_1 la componente de G que contiene e, la *componente principal de G*.

1.41 Teorema. (a) *G_1 es un subgrupo abierto y normal de G.*

(b) *G_1 es el grupo generado por* $\exp(A)$.

(c) *Si A es conmutativo entonces $G_1 = \exp(A)$.*

(d) *Si A es conmutativo entonces el grupo cociente G/G_1 no contiene ningún elemento de orden finito a parte de la unidad.*

Demostración. **(a)** Como G es abierto y A localmente conexo, todas componentes de G son abiertas. Para cualquier $x \in G_1$ el subconjunto $x^{-1}G_1$ de G es conexo, siendo la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua. Como $e = x^{-1}x \in x^{-1}G_1$, $x^{-1}G_1 \subseteq G_1$. Eso demuestra que G_1 es un subgrupo.

Sea $x \in G$ y sea $f\colon G_1 \to G$ dado por $f(y) := x^{-1}yx$. Entonces f es continua y $f(G_1) = x^{-1}G_1x$ es conexo. Como $f(e) = e \in f(G_1)$, $x^{-1}G_1x \subseteq G_1$, demostrando que G_1 es normal.

(b) Sea Γ el grupo generado por $\exp(A)$. El mapeo $\exp\colon A \to G$ es continuo por la Nota 1.27(e). Siendo un espacio vectorial A es conexo. En seguida, también $\exp(A)$ es conexo. Como $e \in \exp(A)$, se tiene que $\exp(A) \subseteq G_1$. Por lo tanto $\Gamma \subseteq G_1$.

El Teorema 1.18 y $\sigma(e) = \{1\}$ implican que existe una vecindad abierta $U \subseteq G_1$ de e tal que para todo $x \in U$ el espectro $\sigma(x)$ no separa 0 de ∞. Por el Teorema 1.36(b) se tiene que $U \subseteq \exp(A)$, es decir, $\operatorname{int}(\exp(A))$ no es vacío. Sea $y \in \Gamma$. Sea $L_y \in \mathcal{B}(A)$ la multiplicación por y por la izquierda, un homeomorfismo de A. Entonces $L_yU \subseteq L_y\Gamma \subseteq \Gamma$ es una vecindad abierta de y. Como eso aplica a todo $y \in \Gamma$, Γ es abierto.

Para $x \in G_1$ el cogrupo $x\Gamma = L_x\Gamma$ es abierto, porque L_x es un homeomorfismo de A y Γ es abierto. Los cogrupos de Γ en G_1 forman una partición de G_1. Γ es el complemento de la unión de todos los cogrupos que no atraviesan a Γ. Como esa unión es abierta, Γ es cerrado relativamente en G_1.

Hemos demostrado que Γ es abierto y cerrado relativamente en G_1. Por lo tanto, $\Gamma = G_1$ porque G_1 es conexo y Γ no vacío.

(c) Si A es conmutativo podemos aplicar la identidad funcional (1.33) a todos elementos $x, y \in A$. Eso implica que $\exp(x)\exp(y) \in \exp(A)$ para todo $x, y \in A$, es decir, $\exp(A)$ es un grupo. Junto con el inciso (b) concluimos.

(d) Sea A conmutativo. Sean $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in G_1$. Eso es equivalente a que $[x]^n = e$ en G/G_1 (donde $[x]$ denota la clase de x y e la unidad en G/G_1), es decir, $[x]$ tiene orden finito. Tenemos que demostrar que $[x] = e$, o equivalentemente, que $x \in G_1$.

Existe $a \in A$ tal que $x^n = \exp(a)$, por el inciso (c). Definimos $y := \exp(a/n)$ y $z := xy^{-1}$. Como $y \in G_1$, es suficiente demostrar que $z \in G_1$.

La conmutatividad implica que $z^n = x^n y^{-n} = \exp(a)\exp(-a) = e$. La interpretación es que z es un cero del polinomio $\lambda^n - 1$. Por el Teorema 1.38(a) se tiene que $\sigma(z)$ consiste de un número finito de puntos de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, es decir, no separa 0 de ∞. Por el Teorema 1.36(b) existe un logaritmo $w \in A$ de z y luego $z = \exp(w) \in \exp(A) = G_1$. $\square$

2. Álgebras de Banach conmutativas

2.1. Ideales y homomorfismos

2.1 Definición. Sea A un álgebra conmutativa. Un subespacio vectorial J de A es un *ideal* cuando $xJ \subseteq J$ para todo $x \in A$. En ese caso y si $J \neq A$ entonces J es un *ideal propio*. Un *ideal maximal* es un ideal propio que no está contenido estrictamente en ningún ideal propio.

2.2 Proposición. (a) *Un ideal propio de un álgebra conmutativa A no contiene ningún elemento invertible de A.*

(b) *Si J es un ideal en un álgebra de Banach conmutativa A, entonces $\overline{J}$ también es un ideal.*

Demostración. **(a)** Por contradicción sea $y \in J$ invertible. Entonces par cualquier $x \in A$ tenemos que $x = (xy^{-1})y \in xy^{-1}J \subseteq J$. Eso implica que $A \subseteq J$, una contradicción.

(a) Sean $x \in A$, $y \in \overline{J}$ y $(y_n) \subseteq J$ tal que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Como $xy_n \in J$ para todo n, $xy = \lim_{n\to\infty} xy_n \in \overline{J}$. Eso dice que $x\overline{J} \subseteq \overline{J}$. □

2.3 Teorema. (a) *Si A es un álgebra conmutativo, entonces todo ideal propio de A está contenido en un ideal maximal de A.*

(b) *Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces todo ideal maximal de A es cerrado.*

Demostración. **(a)** Sea J un ideal propio de A y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los ideales propios que contienen J. Consideramos el orden parcial en $\mathcal{P}$ dado por la relación de inclusión de conjuntos. Por el Teorema de maximalidad de Hausdorff existe un subconjunto maximal $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ que está totalmente ordenado. Sea M la unión de todos los elementos de $\mathcal{Q}$. Por el orden total en $\mathcal{Q}$ se sigue que M es un subespacio vectorial de A. Sean $x \in A$ y $y \in M$. Entonces existe $S \in \mathcal{Q}$ tal que $y \in S$. En seguida, $xy \in S \subseteq M$. Eso demuestra que $xM \subseteq M$, es decir, M es un ideal. Como ninguno de los ideales propios que conforman $\mathcal{Q}$ contiene e, tampoco M contiene e y por tanto M es propio. Como $\mathcal{Q}$ es maximal, M también es maximal.

(b) Sea M un ideal maximal en A. Supongamos por contradicción que $\overline{M} \cap G(A) \neq \varnothing$. Como $G(A)$ es abierto en A eso implica que $M \cap G(A) \neq \varnothing$. Pero eso es una contradicción a que M es propio. Entonces $\overline{M}$, que es un ideal por la Proposición 2.2(b), no contiene ningún elemento invertible de A, es decir, es un ideal propio. Como M es maximal, $\overline{M} = M$. □

2.4 Repaso. Sean X un espacio de Banach y $N \subseteq X$ un subespacio cerrado. Para todo $x \in X$ escribimos $\pi(x) := [x] := x + N$, la clase de x. El espacio cociente X/N (el conjunto de los $[x]$) es un espacio de Banach con la norma

$$\|[x]\| := \inf\{\|x - z\| \mid z \in N\} = \inf\{\|y\| \mid y \in [x]\}.$$

El mapeo cociente $\pi\colon X \to X/N$ es lineal, continuo y abierto.

2.5 Proposición. *Sean A, B álgebras conmutativas.*

(a) *Sea $\Phi\colon A \to B$ un homomorfismo. Entonces el núcleo $\mathcal{N}(\Phi)$ es un ideal de A. Si Φ es continuo, entonces $\mathcal{N}(\Phi)$ es cerrado.*

(b) *Sean J un ideal propio cerrado de A. Entonces A/J es un álgebra de Banach conmutativa y π es un homomorfismo.*

Demostración. **(a)** Si $x \in A$ y $y \in \mathcal{N}(\Phi)$, entonces $\Phi(xy) = x\Phi(y) = x \cdot 0 = 0$, es decir, $xy \in \mathcal{N}(\Phi)$.

(b) Tenemos que demostrar primero que la multiplicación natural

$$[x][y] := [xy]$$

está bien definida, es decir, que no depende de la selección de representantes. Sean $x' \in [x]$ y $y' \in [y]$ otros representantes. Entonces $x' - x, y' - y \in J$ y

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y) \in J.$$

eso implica que $[x'y'] = [xy]$.

Demostremos que A/J tiene todas propiedades necesarias para ser un álgebra de Banach con esa multiplicación. Primero verifiquemos la asociatividad:

$$[x]([y][z]) = [x][yz] = [x(yz)] = [(xy)z] = [xy][z] = ([x][y])[z]$$

La bilinealidad y conmutatividad de la multiplicación se comprueban similarmente.

Tenemos que $\pi(xy) = [xy] = [x][y] = \pi(x)\pi(y)$, es decir, π es un homomorfismo (la linealidad ya sabemos del Repaso 2.4). Claramente

$$\|[x]\| \leq \|x\| \tag{2.1}$$

por la definición de la norma cociente.

Sean $x_1, x_2 \in A$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $y_1, y_2 \in J$ tales que

$$\|x_i + y_i\| \leq \|[x_i]\| + \varepsilon \qquad i = 1, 2.$$

Además, como $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in [x_1 x_2]$,

$$\begin{aligned} \|[x_1][x_2]\| = \|[x_1 x_2]\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\|\,\|x_2 + y_2\| \\ \leq (\|[x_1]\| + \varepsilon)(\|[x_2]\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Dejando $\varepsilon \to 0$ obtenemos $\|[x_1][x_2]\| \leq \|[x_1]\| \, \|[x_2]\|$.

Sea e la unidad de A. Es obvio que $[e]$ es la unidad de A/J. Como J es propio, $e \notin J$ y $[e] \neq 0$ (aquí 0 denota $[0]$). Entonces $\|[e]\| = \|[e][e]\| \leq \|[e]\| \, \|[e]\|$ implica que $\|[e]\| \geq 1$, y (2.1) implica que $\|[e]\| = 1$. □

2.6 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach conmutativa y Δ el conjunto de todos homomorfismos complejos no triviales en A.*

(a) *Todo ideal maximal de A es el núcleo de un y sólo un $h \in \Delta$.*

(b) *Si $h \in \Delta$ entonces $\mathcal{N}(h)$ es un ideal maximal de A.*

(c) *Un elemento $x \in A$ es invertible en A si y sólo si $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \Delta$.*

(d) *Un elemento $x \in A$ es invertible en A si y sólo si x no es elemento de ningún ideal propio de A.*

(e) *$\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $h(x) = \lambda$ para un $h \in \Delta$.*

Demostración. **(a)** Sea M un ideal maximal de A. Entonces M es cerrado por el Teorema 2.3(b) y A/M es un álgebra de Banach. Demostraremos que

$$[x] \text{ es invertible para todo } x \in A \backslash M. \tag{2.2}$$

Pongamos $J := \{ax+y \mid a \in A, \ y \in M\}$. Si $z \in A$ y $ax+y \in J$ entonces $z(ax+y) = (za)x+zy \in J$ porque $zy \in M$. Eso demuestra que J es un ideal de A. Como $x = ex + 0 \in J\backslash M$ el ideal J es estrictamente mas grande que M, es decir, $J = A$ porque M es maximal. Existen $a \in A$ y $y \in M$ tal que $ax + y = e$. Eso implica que $[e] = [ax] = [a][x]$ y demuestra (2.2).

Lo que acabamos de demostrar se puede entender así: todo elemento no cero de A/M es invertible. El teorema de Gelfand y Mazur, Teorema 1.13, dice que existe un isomorfismo isométrico $j\colon A/M \to \mathbb{C}$. Pongamos $h := j \circ \pi$, donde $\pi\colon A \to A/M$ es el mapeo cociente. En seguida, $h \in \Delta$ y $\mathcal{N}(h) = M$.

Como $e \notin M$ y $\operatorname{codim}(M) = 1$, $A = e\mathbb{C} \oplus M$. Los valores del mapeo h están dados por su núcleo M y sus valores en $e\mathbb{C}$. Pero como $h(e) = 1$, los valores de h están definidos por su núcleo. En seguida, dos distintos elementos de Δ no pueden tener el mismo núcleo.

(b) Si $h \in \Delta$ entonces $\mathcal{N}(h)$ es un ideal cerrado de A, por la Proposición 2.5(a). Como $\operatorname{codim}(\mathcal{N}(h)) = 1$, ese ideal es maximal.

(c) Sean x invertible en A y $h \in \Delta$. Entonces la Proposición 1.5 dice que $h(x) \neq 0$. Si x no es invertible, tenemos que escoger $h \in \Delta$ tal que $h(x) = 0$. El ideal xA no contiene e y por tanto es propio. Por el Teorema 2.3(a) existe un ideal maximal que contiene xA. El inciso (a) nos proporciona el homomorfismo complejo que buscábamos.

(d) Si x es invertible, entonces la Proposición 2.2(a) dice que x no está en ningún ideal propio. Inversamente, si x no está en ningún ideal propio, x no está en el núcleo de ningún

$h \in \Delta$, por el inciso (a). Entonces $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \Delta$ y el inciso (c) dice que x es invertible.

(e) La siguiente cadena de equivalencias sigue del inciso (c) y de $h(e) = 1$:

$$\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x) \Leftrightarrow (\lambda e - x) \in G(A) \Leftrightarrow \forall h \in \Delta\colon h(\lambda e - x) \neq 0 \Leftrightarrow \forall h \in \Delta\colon h(x) \neq \lambda.$$

Eso comprueba la afirmación. $\square$

Daremos una aplicación de esas nociones. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $x \cdot y$ el producto escalar Euclidiano de x y y.

2.7 Teorema. *Sean $a_m \in \mathbb{C}$ con los índices $m \in \mathbb{Z}^n$ tales que*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| < \infty. \tag{2.3}$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dado por la expresión

$$f(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{i} m \cdot x}. \tag{2.4}$$

Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces existen $b_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |b_m| < \infty. \tag{2.5}$$

y

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m \mathrm{e}^{\mathrm{i} m \cdot x} \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Demostración. Sea A la colección de funciones con una representación como en (2.3) y (2.4). Es obvio que A es un espacio vectorial respecto operaciones en puntos y que la serie en (2.3) es una norma en el. Una colección de coeficientes a_m se puede entender como elemento de $L^1(\mathbb{Z}^n)$ respecto a la medida de conteo en $\mathbb{Z}^n$ ($L^1(\mathbb{Z}^n)$ es isomorfo isométricamente a ℓ^1). Ese espacio es completo. Una sucesión de Cauchy (f_k) en A viene con coeficientes que forman una sucesión de Cauchy en $L^1(\mathbb{Z}^n)$. Ella converge e induce convergencia de (f_k) en A. Por lo tanto, A es un espacio de Banach.

Demostremos que A es un álgebra de Banach conmutativa respecto a multiplicación en puntos. Sean $f_1, f_2 \in A$ y tengan coeficientes a_m^1 y a_m^2. Como la serie en (2.4) converge absolutamente, se tiene

$$f_1(x) f_2(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_m^1 a_k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+k) \cdot x} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \underbrace{\left(\sum_{m+k=\ell} a_m^1 a_k^2 \right)}_{\tilde{a}_\ell} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \ell \cdot x} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \tilde{a}_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i} \ell \cdot x}.$$

Además,

$$\|f_1 f_2\| = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} |\tilde{a}_\ell| \le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \sum_{m+k=\ell} |a_m^1 a_k^2| = \Bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |a_m^1|\Bigg)\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k^2|\Bigg) \le \|f_1\|\,\|f_2\| < \infty.$$

La función 1 está en A y tiene los coeficientes $a_0 = 1$ y $a_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$. Entonces $\|1\| = 1$, y 1 es la unidad de A. Hemos demostrado que A es un álgebra de Banach conmutativa.

Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ la evaluación $A \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x)$, es un homomorfismo complejo. Si f no tiene cero en $\mathbb{R}^n$ entonces ninguna evaluación tiene f en su núcleo. Por el Teorema 2.6(c) basta demostrar que las evaluaciones en puntos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los homomorfismos complejos de A.

Para $r = 1, 2, \dots, n$ pongamos

$$z_r := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{r}, 0, \dots, 0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Z}^n$$

y definimos $g_r(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_r\cdot x}$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Como $1/g_r(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z_r)\cdot x}$, g_r y $1/g_r$ están en A, son invertibles y tienen norma 1. Sea h un homomorfismo complejo. El Teorema 1.6(c) implica que

$$|h(g_r)| \le 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{1}{h(g_r)}\right| = \left|h\left(\frac{1}{g_r}\right)\right| \le 1.$$

En consecuencia, $|h(g_r)| = 1$ y existen $\eta_r \in \mathbb{R}$ tales que con $y := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ se tiene

$$h(g_r) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_r} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_r\cdot y} = g_r(y) \qquad \text{para } r = 1, 2, \dots n. \tag{2.7}$$

Sea $\mathcal{P}$ la colección de combinaciones lineales de funciones de la forma

$$\prod_{r=1}^{n} g_r^{\mu_r},$$

donde $\mu_r \in \mathbb{Z}$ ($\mathcal{P}$ son los polinomios trigonométricos). Como h es un homomorfismo, (2.7) implica

$$h(P) = P(y) \qquad \text{para todo } P \in \mathcal{P}. \tag{2.8}$$

Si $m = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$, entonces

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x} = \exp\Bigg(\mathrm{i}\sum_{r=1}^{n} \mu_r z_r \cdot x\Bigg) = \prod_{r=1}^{n} g_r(x)^{\mu_r}.$$

Por lo tanto, la convergencia absoluta de la serie en (2.4) implica que $\mathcal{P}$ es denso en A. Observemos que h es continuo. Sea $f \in A$ y $(P_k) \subseteq \mathcal{P}$ tales que $P_k \to f$ en A. Entonces

$$h(f) = \lim_{k\to\infty} h(P_k) = \lim_{k\to\infty} P_k(y) = f(y),$$

es decir, h es la evaluación en y. Eso termina la prueba. □

2.2. Transformadas de Gelfand

2.8 Repaso. Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y Γ una colección de mapeos $X \to Y$. La *topología débil* en X respecto a Γ (o la *topología inicial*) es la topología que tiene como base la colección de subconjuntos $f^{-1}(V) \subseteq X$ donde $V \subseteq Y$ es abierto y $f \in \Gamma$. La topología débil es la topología mas chica en X que hace continuos a todos mapeos en Γ.

2.9 Definición. Sea Δ la colección de todos homomorfismos complejos en un álgebra de Banach conmutativa. Par cualquier $x \in A$ definimos la *transformada $\hat{x}$ de Gelfand de x* como evaluación en x:

$$\begin{aligned}\hat{x}\colon \Delta &\to \mathbb{C}\\ h &\mapsto h(x).\end{aligned}$$

El mapeo $x \mapsto \hat{x}$ es la *transformación de Gelfand*.

Sea $\hat{A}$ la colección de todos $\hat{x}$, donde $x \in A$. La *topología de Gelfand* en Δ es la topología débil generada por $\hat{A}$. En consecuencia, $\hat{A} \subseteq C(\Delta)$.

Por la biyección entre Δ y la colección de los ideales maximales de A, dada en el Teorema 2.6, el conjunto Δ con su topología de Gelfand se conoce como el *espacio de ideales maximales de A*.

El *radical de A*, denotado por $\operatorname{rad} A$, es la intersección de todos ideales maximales de A. Si $\operatorname{rad} A = \{0\}$, entonces A se llama *semisimple*.

2.10 Teorema. *Sea Δ el espacio de ideales maximales de un álgebra de Banach conmutativa A.*

(a) *Δ es un espacio de Hausdorff compacto.*

(b) *La transformación de Gelfand es un homomorfismo de A en una subálgebra $\hat{A}$ de $C(\Delta)$ cuyo núcleo es* $\operatorname{rad} A$. *Por lo tanto la transformación de Gelfand es un isomorfismo de A y $\hat{A}$ si y sólo si A es semisimple.*

(c) *Para todo $x \in A$ el rango de $\hat{x}$ es el espectro $\sigma(x)$. Entonces*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$$

y la transformación de Gelfand es continua. Además, $x \in \operatorname{rad} A$ si y sólo si $\rho(x) = 0$.

Demostración. **(b)** Sean $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $h \in \Delta$. Entonces

$$\widehat{\alpha x}(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = \alpha(\hat{x}(h)) = (\alpha\hat{x})(h)$$
$$\widehat{x+y}(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x}+\hat{y})(h)$$

y

$$\widehat{xy}(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h).$$

y $x \mapsto \hat{x}$ es un homomorfismo. Su núcleo consiste de los elementos $x \in A$ que cumplen $\hat{x}(h) = h(x) = 0$, es decir, $x \in \mathcal{N}(h)$, para todo $h \in \Delta$. Por el Teorema 2.6(b) eso implica la afirmación.

(c) El Teorema 2.6(e) implica la siguiente cadena de equivalencias:

$$\lambda \in \hat{x}(\Delta) \Leftrightarrow \exists h \in \Delta \colon \hat{x}(h) = h(x) = \lambda \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(x).$$

(a) Sea A^* el dual de A (en el sentido de espacios de Banach) y sea $K := \{\Lambda \in A^* \mid \|\Lambda\| \leq 1\}$. Para cualquier $z \in A$ sea $\hat{z}$ la evaluación de elementos de A^* en z. Eso es una extensión natural de la transformada de Gelfand de z al conjunto A^* (nótese que $\Delta \subseteq A^*$). La *topología débil** en A^* es la topología débil generada por la colección de mapeos $\{\hat{z} \mid z \in A\}$. El teorema de Banach-Alaoglu dice que con esa topología K es un espacio de Hausdorff compacto. El Teorema 1.6(c) implica que $\Delta \subseteq K$. Por su definición la topología de Gelfand en Δ es la misma que aquella inducida por la topología débil* en K. Por tanto, basta probar que Δ es débil*-cerrado en K.

Sea Λ_0 un punto en la débil*-cerradura de Δ. Hay que demostrar que $\Lambda_0 \in \Delta$. Eso sería una consecuencia de

$$\Lambda_0(xy) = (\Lambda_0 x)(\Lambda_0 y) \qquad \text{para todo } x, y \in A, \tag{2.9}$$

y

$$\Lambda_0(e) = 1. \tag{2.10}$$

La última afirmación es necesaria para evitar que $\Lambda_0 = 0 \notin \Delta$.

Demostremos (2.9) y (2.10). Sean $x, y \in A$ y $\varepsilon > 0$. Para cualquier $z \in A$ el conjunto

$$W_z := \{\Lambda \in A^* \mid |\Lambda z - \Lambda_0 z| < \varepsilon\} = \hat{z}^{-1}(B_\varepsilon(\Lambda_0 z)),$$

donde $B_\varepsilon(\Lambda_0 z) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \Lambda_0 z| < \varepsilon\}$, es débil*-abierto en A^* y contiene Λ_0. Entonces

$$W := W_e \cap W_x \cap W_y \cap W_{xy}$$

es una vecindad abierta de Λ_0 respecto a la topología débil*. Existe $h \in \Delta \cap W$ porque Λ_0 está en la débil*-frontera de Δ. Se tiene

$$|1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon, \tag{2.11}$$

$$\Lambda_0(xy) - (\Lambda_0 x)(\Lambda_0 y) = \Big(\Lambda_0(xy) - h(xy)\Big) + \Big(h(y) - \Lambda_0 y\Big)h(x) + \Big(h(x) - \Lambda_0 x\Big)\Lambda_0 y$$

y luego con el inciso (c)

$$|\Lambda_0(xy) - (\Lambda_0 x)(\Lambda_0 y)| < (1 + \|x\| + |\Lambda_0 y|)\varepsilon. \tag{2.12}$$

Dejando $\varepsilon \to 0$ en (2.11) y (2.12) obtenemos (2.9) y (2.10). □

2.11 Teorema. *Sean A, B álgebras de Banach, y sea B conmutativa y semisimple. Entonces todo homomorfismo $\psi\colon A \to B$ es continuo.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ en A y $\psi(x_n) \to y$ en B. Por el teorema de la gráfica cerrada, es suficiente demostrar que $y = \psi(x)$.

Sea $h\colon B \to \mathbb{C}$ un homomorfismo. Entonces $\phi := h \circ \psi$ también es un homomorfismo, y h y ϕ son continuos, por el Teorema 1.6(c). Por lo tanto,

$$h(y) = \lim_{n\to\infty} h(\psi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x) = h(\psi(x)),$$

es decir, $h(y - \psi(x)) = 0$ y $y - \psi(x) \in \mathcal{N}(h)$. Particularmente, eso es cierto para todo $h \in \Delta_B$ y implica que $y - \psi(x) \in \operatorname{rad} B$. Como B es semisimple, $y = \psi(x)$. □

2.12 Corolario. *Todo isomorfismo entre dos álgebras de Banach conmutativas y semisimples es un homeomorfismo.*

Queremos entender mejor cuando $\hat{A}$ del Teorema 2.10(b) es cerrado.

2.13 Lema. *Si A es un álgebra de Banach conmutativa y*

$$r := \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \qquad s := \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}, \tag{2.13}$$

entonces $s^2 \le r \le s$.

Demostración. Sea $x \in A\setminus\{0\}$. Como la transformación de Gelfand es un homomorfismo y $\|\hat{x}\|_\infty \ge s\|x\|$, el Teorema 2.10(c) implica

$$\|x^2\| \ge \|\widehat{x^2}\|_\infty = \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \ge s^2\|x\|^2.$$

Eso implica $s^2 \le r$.

Demostremos por inducción sobre n que para un $x \in A\setminus\{0\}$ se cumple

$$\|x^m\| \ge r^{m-1}\|x\|^m \qquad \text{para } m = 2^n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Como

$$\|x^2\| \ge r\|x\|^2 \tag{2.15}$$

por la definición de r, tenemos la afirmación para $n = 1$. Si (2.14) vale para un $n \in \mathbb{N}$, entonces por (2.15)

$$\|x^{2^{n+1}}\| \ge r\|x^{2^n}\|^2 \ge r(r^{2^n-1}\|x\|^{2^n})^2 = r^{2^{n+1}-1}\|x\|^{2^{n+1}},$$

comprobando (2.14).

Del Teorema 2.10(c) y ecuación (2.14) obtenemos

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{m\to\infty} \|x^m\|^{1/m} \ge \lim_{m\to\infty} r^{1-1/m}\|x\| = r\|x\|.$$

Variando x sobre A se sigue $r \le s$. □

2.14 Teorema. *Sea A un álgebra de Banach conmutativo.*

(a) *La transformación de Gelfand es un mapeo isométrico (es decir, $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$) si y sólo si $\|x^2\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$.*

(b) *A es semisimple y $\hat{A}$ cerrado en $C(\Delta)$ si y sólo si existe $K < \infty$ tal que $\|x\|^2 \le K\|x^2\|$ para todo $x \in A$.*

Demostración. **(a)** En la terminología del Lema 2.13 y como $s \le 1$ la transformación de Gelfand es isométrica si y sólo si $s = 1$, es decir, si y sólo si $r = 1$. La definición de r y $\|x^2\| \le \|x\|^2$ para todo $x \in A$ implican la afirmación.

(b) La existencia de K es equivalente a $r > 0$ en el Lema 2.13, y en consecuencia a $s > 0$.

Si $s > 0$, entonces $\|x\| \le \|\hat{x}\|_\infty/s$ para todo $x \in A$, la transformación de Gelfand es inyectiva y tiene inversa continua en $\hat{A}$. Además, por el Teorema 2.10(b), A es semisimple. Sea $(x_n) \subseteq A$ tal que $\widehat{x_n}$ es una sucesión de Cauchy en $\hat{A}$. Por $\|x_m - x_n\| \le \|\hat{x}_m - \hat{x}_n\|_\infty/s$, (x_n) es de Cauchy en A y converge en A. Por la continuidad de la transformación de Gelfand $\widehat{x_n}$ converge en $\hat{A}$. Eso demuestra que $\hat{A}$ es completo, es decir, cerrado en $C(\Delta)$.

Por otro lado, si A es semisimple y $\hat{A}$ cerrado, entonces la transformación de Gelfand es un isomorfismo por el Teorema 2.10(b), y luego el teorema de la aplicación abierta implica que la transformación de Gelfand es un homeomorfismo. Eso implica $s > 0$. $\square$

2.15 Ejemplos. Veremos algunos ejemplos del espacio de los ideales maximales.

(a) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, y sea $A = C(X)$. Para todo $x \in X$ se define un $h_x \in \Delta$ por $h_x(f) := f(x)$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \ne y$. Por el teorema de Urysohn existe $f \in C(X)$ tal que $h_x(f) = f(x) \ne f(y) = h_y(f)$, es decir, $h_x \ne h_y$. Eso implica que $x \mapsto h_x$ es una inyección de X en Δ.

Demostremos que esa inyección es una biyección. Sea $h \in \Delta$. Por contradicción supongamos que no hay $x \in A$ tal que $M := \mathcal{N}(h) \subseteq \mathcal{N}(h_x)$. Entonces existe para todo $x \in A$ un $f \in M \backslash \mathcal{N}(h_x)$, es decir, $f(x) \ne 0$. Por la compacidad de X podemos escoger $f_1, f_2, \dots, f_n \in M$ tales que para todo $x \in X$ existe k tal que $f_k(x) \ne 0$. Definimos

$$g := f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2 + \dots + f_n\bar{f}_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2.$$

Como M es un ideal y $f_k \in M$, también $f_k\bar{f}_k \in M$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Eso implica que $g \in M$ y $g > 0$ en X. Entonces g es invertible en A, un contradicción con que M es propio.

Hemos demostrado que sí hay $x \in A$ tal que $M := \mathcal{N}(h) \subseteq \mathcal{N}(h_x)$. Como ambos M y $\mathcal{N}(h_x)$ son ideales maximales, $M = \mathcal{N}(h_x)$. En seguida, $h = h_x$, por el Teorema 2.6(a).

Lo anterior implica que podemos identificar Δ con X. Si $f \in C(X)$ y $h_x \in \Delta$ entonces se tiene

$$\hat{f}(h_x) = h_x(f) = f(x).$$

Por lo tanto también podemos identificar $C(X)$ con la colección de las evaluaciones generadas por elementos en $C(X)$ sobre Δ. Eso hace que la transformación de Gelfand es la identidad en $C(X)$.

La topología de Gelfand γ en $\Delta = X$ es la más débil que hace continuos a todos elementos de $C(X)$, es decir, es mas débil que la topología original τ en X. Pero ambas topologías son de Hausdorff y compactas. Por un teorema de topología general, $\tau = \gamma$ y topológicamente son iguales Δ y X.

(b) Sea A el álgebra de Banach de la series trigonométricas que convergen absolutamente, como en la demostración del Teorema 2.7 en el caso $n = 1$. Demostramos que todo $h \in \Delta$ es una evaluación en un $x \in \mathbb{R}$. Como $f \in A$ es 2π-periódico, podemos identificar los conjuntos Δ y $\mathbb{S}^1$, el círculo. La transformada de Gelfand de un $f \in A$ es la misma función f, continua en $\mathbb{S}^1$ (porque su series trigonométrica converge absoluta y uniformemente). La topología de Δ hace continuas las funciones de un subconjunto de $C(\mathbb{S}^1)$, es decir, es mas débil que la de $\mathbb{S}^1$. El mismo argumento como en (a) implica que coinciden las topologías de Δ y $\mathbb{S}^1$. Por eso escribiremos $\Delta = \mathbb{S}^1$. Así $\hat{A} = A$ es un subconjunto de $C(\mathbb{S}^1)$.

Cada $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ tiene una serie de Fourier que converge absoluta- y uniformemente, es decir, $C^1(\mathbb{S}^1) \subseteq \hat{A}$ y $\hat{A}$ es denso en $C(\Delta)$. Por otro lado, existen funciones continuas en $\mathbb{S}^1$ con serie de Fourier que no converge en todos puntos. Eso demuestra que $\hat{A} \neq C(\Delta)$.

2.3. Involuciones

2.16 Definición. Una *involución* en un álgebra A es un mapeo $A \to A$, $x \mapsto x^*$, que cumple para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(x+y)^* = x^* + y^* \tag{2.16}$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \tag{2.17}$$

$$(xy)^* = y^* x^* \tag{2.18}$$

$$x^{**} = x. \tag{2.19}$$

En otras palabras, una involución es un antiautomorfismo conjugado-lineal con período 2.

Para $x \in A$ el elemento x^* es el *adjunto* de x. Un elemento con $x = x^*$ es *hermitiano* o *autoadjunto*.

2.17 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach con una involución y $x \in A$.*

(a) $x + x^*$, $\mathrm{i}(x - x^*)$ *y* xx^* *son autoadjuntos.*

(b) *Existe una y sólo una representación* $x = u + \mathrm{i}v$ *donde* $u, v \in A$ *son autoadjuntos.*

(c) *La unidad es autoadjunta.*

(d) x *es invertible si y sólo si* x^* *es invertible. Si eso es el caso, entonces* $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

(e) $\lambda \in \sigma(x)$ *si y sólo si* $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Demostración. (a) es obvio. Para (b) pongamos $u := (x+x^*)/2$ y $v := \mathrm{i}(x^*-x)/2$. Entonces $x = u + \mathrm{i}v$ y u, v son autoadjuntos por (a). Si $x = u' + \mathrm{i}v'$ con autoadjuntos u', v', entonces pongamos $w := v' - v$. Se sigue que w es autoadjunto y que $0 = x - x = u' - u + \mathrm{i}(v' - v)$, es decir, $iw = u - u'$ también es autoadjunto. En consecuencia,

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw,$$

es decir, $w = 0$ y $u' = u$.

Para ver (c), usamos (a): $e^* = ee^* = (ee^*)^* = e^{**} = e$. Si x es invertible, entonces $(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e$ y similarmente $x^*(x^{-1})^* = e$. Eso demuestra (d). Finalmente, (e) sigue por una aplicación de (d) a $(\lambda e - x)$. □

2.18 Teorema. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa y semisimple. Entonces toda involución en A es continua.*

Demostración. Sean h un homomorfismo complejo en A y $\phi(x) := \bar{h}(x^*)$. Entonces $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(\lambda x) = \bar{h}((\lambda x)^*) = \bar{h}(\bar{\lambda} x^*) = \lambda\phi(x)$ y $\phi(xy) = \bar{h}(y^* x^*) = \phi(x)\phi(y)$, es decir, ϕ es un homomorfismo complejo y por tanto continuo. Sean $x_n \to x$ y $x_n^* \to y$ sucesiones convergentes. Se tiene

$$\bar{h}(x^*) = \phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{h}(x_n^*) = \bar{h}(y).$$

Que A es semisimple implica, como en la demostración del Teorema 2.11, que $y = x^*$.

El álgebra A se puede ver como un espacio de Banach sobre el campo real. Con respecto al campo real la involución es un mapeo lineal. Junto con lo que acabamos de demostrar, el teorema de la gráfica cerrada dice que $x \mapsto x^*$ es continuo. □

2.19 Definición. Un álgebra de Banach con una involución $x \mapsto x^*$ que cumple

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \tag{2.20}$$

es un B^**-álgebra.*

2.20 Nota. En un B^*-álgebra A $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\| \, \|x^*\|$ implica $\|x\| \leq \|x^*\|$ y entonces $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$. Por lo tanto

$$\|x^*\| = \|x\| \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{2.21}$$

Además,

$$\|xx^*\| = \|x\| \, \|x^*\|. \tag{2.22}$$

Inversamente, (2.21) y (2.22) implican (2.20).

2.21 Teorema (Gelfand-Naimark). *Sea A un B^*-álgebra conmutativa, y sea Δ su espacio de ideales maximales. Entonces la transformación de Gelfand es un isomorfismo isométrico de A con imagen $C(\Delta)$, y cumple*

$$h(x^*) = \overline{h(x)} \qquad \text{para todo } x \in A,\ h \in \Delta, \tag{2.23}$$

o equivalentemente

$$\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}} \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{2.24}$$

Particularmente x es autoadjunto si y sólo si $\hat{x}$ es una función real.

Un isomorfismo que preserva involuciones, como en (2.24)*, es un $*$-isomorfismo.*

Demostración. Primero demostremos (2.23) (y así también (2.24)). Sean $u \in A$ autoadjunto y $h \in \Delta$. Queremos demostrar que $h(u)$ es real. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ pongamos $z := u + \mathrm{i}te$. Si $h(u) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ con reales α, β entonces

$$h(z) = \alpha + \mathrm{i}(\beta + t)$$

y

$$zz^* = (u + \mathrm{i}te)(u - \mathrm{i}te) = u^2 + t^2 e.$$

Eso implica

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(u)|^2 \le \|z\|^2 = \|zz^*\| \le \|u\|^2 + t^2$$

y

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \le \|u\|^2.$$

Como $t \in \mathbb{R}$ fue arbitrario, $\beta = 0$ y $h(u)$ es real.

Si $x \in A$, entonces por el Teorema 2.17(b) existen $u, v \in A$ autoadjuntos tales que $x = u + \mathrm{i}v$. En consecuencia $h(u), h(v)$ son reales y

$$h(x^*) = h(u - \mathrm{i}v) = h(u) - \mathrm{i}h(v) = \overline{h(u) + \mathrm{i}h(v)} = \overline{h(x)},$$

es decir, (2.23) se cumple.

Ahora demostremos que $\hat{A}$ es cerrada en $C(\Delta)$. Sean $x \in A$ y $y := xx^*$. Entonces y es autoadjunto y $\|y^2\| = \|y\|^2$. Por inducción en n se obtiene que $\|y^m\| = \|y\|^m$ para $m = 2^n$. La formula del radio espectral y el Teorema 2.10(c) implican que $\|\hat{y}\|_\infty = \|y\|$. La ecuación (2.24) dice que

$$\hat{y} = \widehat{xx^*} = \hat{x}\widehat{x^*} = \hat{x}\overline{\hat{x}} = |\hat{x}|^2.$$

En seguida,

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

es decir, $x \mapsto \hat{x}$ es isométrico. Como en la prueba del Teorema 2.14(b) se tiene que $\hat{A}$ es cerrada en $C(\Delta)$.

Falta ver que $\hat{A}$ es todo $C(\Delta)$. Por (2.24) $\hat{A}$ es autoadjunta. Si $h_1, h_2 \in \Delta$ y $h_1 \neq h_2$, entonces existe $x \in A$ tal que $\hat{x}(h_1) = h_1(x) \neq h_2(x) = \hat{x}(h_2)$, es decir, $\hat{A}$ separa puntos en Δ. Como Δ no contiene el homomorfismo complejo trivial, para cualquier $h \in \Delta$ existe $\hat{x} \in \hat{A}$ tal que $\hat{x}(h) = h(x) \neq 0$. En consecuencia aplica el teorema de Stone-Weierstrass y se tiene $\hat{A} = C(\Delta)$. □

Veremos como interactúa la existencia de raíces cuadradas con la involución.

2.22 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con involución y $x \in A$ autoadjunto, tales que $\sigma(x) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$. Entonces existe $y \in A$ que es autoadjunto y tal que $y^2 = x$.*

Demostración. Sean $\Omega := \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ y

$$f(\lambda) := \exp\left(\frac{1}{2}\log(\lambda)\right) = \sqrt{|\lambda|}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\arg(\lambda)\right).$$

Aquí sea log la rama principal del logaritmo en Ω (es decir, $\log 1 = 0$) y $\arg := \operatorname{Im}(\log)$. Como f es holomorfo en Ω y $\sigma(x) \subseteq \Omega$, el cálculo simbólico de funciones holomorfas nos deja definir $y := \tilde{f}(x)$, tal que $y^2 = x$. Lo nuevo aquí será demostrar que y es autoadjunto.

Los coeficientes de la serie de potencias de la función exp son reales. En seguida, para todo $\lambda \in \Omega$ se tiene

$$\exp(\overline{\log(\bar{\lambda})}) = \overline{\exp(\log(\bar{\lambda}))} = \bar{\bar{\lambda}} = \lambda,$$

es decir, el mapeo $\lambda \mapsto \overline{\log(\bar{\lambda})}$ es una rama del logaritmo en Ω. Como también $\overline{\log(\bar{1})} = 0$, obtenemos

$$\overline{\log(\bar{\lambda})} = \log\lambda \qquad \text{y} \qquad -\arg(\bar{\lambda}) = \arg\lambda \qquad \text{para todo } \lambda \in \Omega.$$

Eso implica que

$$\overline{f(\bar{\lambda})} = f(\lambda) \qquad \text{para todo } \lambda \in \Omega. \tag{2.25}$$

Como Ω es simplemente conexo el teorema de Runge implica la existencia de una sucesión (P_n) de polinomios en una variable compleja que converge a f, uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Definimos

$$Q_n(\lambda) := \frac{1}{2}(P_n(\lambda) + \overline{P_n(\bar{\lambda})}).$$

Entonces cada Q_n es un polinomio con coeficientes reales. Por la ecuación (2.25) (Q_n) converge a f en el mismo sentido que (P_n). Definimos $y_n := Q_n(x)$. Como x es autoadjunto y Q_n tiene coeficientes reales, cada y_n es autoadjunto. La continuidad del cálculo simbólico implica que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Si la involución fuera continua (como bajo las condiciones del Teorema 2.18), eso implicaría $y^* = y$.

Sea R el radical de A, y sea $\pi\colon A \to A/R$ el mapeo cociente. Demostremos que

$$[x]^* := [x^*]$$

está bien definido y da una involución en A/R. Si $y \in [x]$ entonces $z := x - y \in R$. Por el Teorema 2.10(c) y el Teorema 2.17(e) se tiene $\rho(z^*) = \rho(z) = 0$ y $z^* \in R$. Entonces $y^* \in [x^*]$ y $[x]^*$ está bien definido. Para ver que esa es una involución, calculamos:

$$([x] + [y])^* = [x + y]^* = [(x + y)^*] = [x^* + y^*] = [x^*] + [y^*] = [x]^* + [y]^*.$$

Las otras propiedades se verifican similarmente. Si x es autoadjunto lo mismo aplica a $[x]$. Si $h \in \Delta$ entonces h tiene una factorización $h = h_R \circ \pi$ con $h_R \in \Delta_R$ porque $R \subseteq \mathcal{N}(h)$. Aquí Δ_R denota el espacio de los ideales maximales de A/R. Si $\widehat{[x]} = 0$ entonces $h(x) = h_R([x]) = \widehat{[x]}(h_R) = 0$ para todo $h \in \Delta$, es decir, $x \in R$ y $[x] = 0$. Eso demuestra que la transformación de Gelfand es inyectiva, y además A/R es semisimple por el Teorema 2.10(b). Por el Teorema 2.18 la involución en A/R es continua. Como π es continuo, $[y_n] = \pi(y_n) \to \pi(y) = [y]$ en A/R. Esos hechos implican que $[y]$ es autoadjunto en A/R y en seguida que $y - y^* \in R$.

Existen $u, v \in A$ autoadjuntos tales que $y = u + \mathrm{i}v$. Acabamos que demostrar que $v \in R$. Como $x = y^2$, tenemos

$$x = u^2 - v^2 + 2\mathrm{i}uv. \tag{2.26}$$

Sea $h \in \Delta$. Entonces $v \in R$ implica que $h(v) = 0$ y por lo tanto $h(x) = h(u)^2$. Las hipótesis implican que $0 \notin \sigma(x)$ y entonces $h(x) \neq 0$ (Teorema 2.6(e)) y $h(u) \neq 0$. Como eso se cumple para todo $h \in \Delta$ el Teorema 2.6(c) dice que u es invertible. Como x es autoadjunto, (2.26) implica que $uv = 0$. Con $v = u^{-1}uv = 0$ concluimos la demostración. □

2.4. Aplicaciones a álgebras no conmutativas

Lo que aprendimos de las álgebras de Banach conmutativas puede ser aplicado también a álgebras no conmutativas. La idea es que uno considera la subálgebra cerrada conmutativa más chica que contiene a un elemento, o a un elemento y su adjunto en el caso que los dos conmutan. La dificultad aquí es controlar como cambia el espectro bajo la restricción a la subálgebra.

2.23 Definición. Si S es un subconjunto de un álgebra de Banach A, entonces el *centralizador de S* es el conjunto

$$\Gamma(S) := \{x \in A \mid xs = sx \text{ para todo } s \in S\}.$$

Decimos que S conmuta si los elementos de S conmutan dos a dos.

2.24 Lema. *En la situación de la Definición* 2.23 *se tiene:*

(a) $\Gamma(S)$ *es una subálgebra cerrada de* A.

(b) $S \subseteq \Gamma(\Gamma(S))$.

(c) *Si* S *conmuta entonces* $\Gamma(\Gamma(S))$ *conmuta.*

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in A$ conmutan con todo $s \in S$, lo mismo se cumple para λx, $x + y$ y xy. Eso demuestra que $\Gamma(S)$ es una subálgebra de A. Si $(x_n) \subseteq \Gamma(S)$ converge a x en A, entonces

$$xs = \lim_{n\to\infty} x_n s = \lim_{n\to\infty} s x_n = sx,$$

por la continuidad de la multiplicación. Eso demuestra que $\Gamma(S)$ es cerrado y comprueba (a).

El inciso (b) es obvio. Si $E \subseteq A$ es tal que $\Gamma(E) \subseteq E$, entonces $\Gamma(E)$ obviamente conmuta. Si S conmuta, entonces $S \subseteq \Gamma(S)$ y por lo tanto, $\Gamma(S) \supseteq \Gamma(\Gamma(S))$. Lo que notamos antes implica, con $E = \Gamma(S)$, que $\Gamma(\Gamma(S))$ conmuta. □

2.25 Teorema. *Sean* A *un álgebra de Banach,* $S \subseteq A$ *un subconjunto que conmuta y* $B := \Gamma(\Gamma(S))$. *Entonces* B *es un álgebra de Banach conmutativa,* $S \subseteq B$ *y* $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ *para todo* $x \in B$.

Demostración. Como $e \in B$ el Lema 2.24 dice que B es un álgebra de Banach conmutativa tal que $S \subseteq B$. Para demostrar la identidad de los espectros es suficiente demostrar $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$ o respectivamente $G(A) \cap B \subseteq G(B)$. Sea $x \in B$ invertible en A. Se tiene que $xy = yx$ y, en seguida, $yx^{-1} = x^{-1}y$ para todo $y \in \Gamma(S)$. Eso demuestra que $x^{-1} \in B$, es decir, $x \in G(B)$. □

2.26 Teorema. *Sean* A *un álgebra de Banach y* $x, y \in A$ *conmutantes. Entonces*

$$\sigma(x + y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y) \qquad y \qquad \sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y).$$

Demostración. Pongamos $S := \{x, y\}$ y $B := \Gamma(\Gamma(S))$. Como B es una subálgebra cerrada de A, $x + y, xy \in B$. El Teorema 2.25 dice que basta demostrar

$$\sigma_B(x + y) \subseteq \sigma_B(x) + \sigma_B(y) \qquad \text{y} \qquad \sigma_B(xy) \subseteq \sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

Como B es conmutativa, para cualquier $z \in B$ el Teorema 2.10(c) dice que $\sigma_B(z)$ es el rango de $\hat{z}$ (la transformada de Gelfand respecto al álgebra B). Usando

$$\widehat{x + y} = \hat{x} + \hat{y} \qquad \text{y} \qquad \widehat{xy} = \hat{x}\hat{y},$$

terminamos la demostración. □

2.27 Definición. Sea A un álgebra con involución. Si $x \in A$ cumple $xx^* = x^*x$, entonces x es *normal*. Un conjunto $S \subseteq A$ es normal si S conmuta y si $\{x^* \mid x \in S\} \subseteq S$.

2.28 Teorema. *Sean A un álgebra de Banach con una involución y B un subconjunto normal de A que es maximal respecto a la propiedad de ser normal. Entonces*

(a) *B es una subálgebra cerrada conmutativa de A y*

(b) *$\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ para todo $x \in B$.*

Demostración. Primero demostremos:

$$(x \in \Gamma(B),\ xx^* = x^*x) \Rightarrow x \in B. \tag{2.27}$$

Si $x \in \Gamma(B)$, entonces $xy^* = y^*x$ para todo $y \in B$ porque B es normal. En seguida, $x^*y = yx^*$ para todo $y \in B$, es decir, $x^* \in \Gamma(B)$. Si x además es normal, se tiene que $B \cup \{x, x^*\}$ es normal. Como B es maximal, $x \in B$.

Demostremos que B es una subálgebra conmutativa de A: Si $x, y \in B$, entonces $x + y \in \Gamma(B)$. Como $x^*, y^* \in B$, $x+y$ es normal. Luego (2.27) implica que $x+y \in B$. Similarmente se demuestra que B es cerrado algebráicamente bajo multiplicación por un escalar y bajo multiplicación de elementos.

Para demostrar que B es cerrada topológicamente, sea $(x_n) \subseteq B$ tal que $x_n \to x$ en A. Como $x_n \in \Gamma(B)$ y $\Gamma(B)$ es cerrado (Lema 2.24(a)), $x \in \Gamma(B)$. Como B es normal, $xy^* = y^*x$ y luego $yx^* = x^*y$ para todo $y \in B$, es decir, $x^* \in \Gamma(B)$. Particularmente, $x^*x_n = x_nx^*$ implica por la continuidad de la multiplicación que x es normal. Entonces (2.27) dice que $x \in B$ y termina la demostración de (a).

Otra aplicación de (2.27) implica que $e \in B$. Demostremos que $G(A) \cap B \subseteq G(B)$. Sea $x \in B$ invertible en A. Como x es normal, lo mismo aplica a x^{-1}. Claramente $x \in B$ implica que $x^{-1} \in \Gamma(B)$. Entonces $x \in B$ por (2.27). □

2.29 Teorema. *En el Teorema* 2.22 *uno puede omitir la hipótesis de conmutatividad.*

Demostración. Sean A un álgebra de Banach y $x \in A$ autoadjunto. Por el teorema de maximalidad de Hausdorff existe un conjunto normal maximal B de A que contiene x. La demostración del Teorema 2.22 puede ser aplicada al álgebra B en vez de A por el Teorema 2.28. □

2.30 Lema. *Sean A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Entonces $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$.*

Demostración. Primero demostremos que

$$(e - xy) \in G(A) \quad \text{si y sólo si} \quad (e - yx) \in G(A). \tag{2.28}$$

Sea $(e - xy) \in G(A)$ y pongamos $z := (e - xy)^{-1}$. Entonces

$$(e + yzx)(e - yx) = e - yx + yz(e - xy)x = e$$

y

$$(e - yx)(e + yzx) = e - yx + y(e - xy)zx = e.$$

En consecuencia, $(e - yx)^{-1} = (e + yzx)$. La conclusión inversa se obtiene análogamente.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(\sigma(xy) \cup \{0\})$. Entonces $(e - xy/\lambda)$ es invertible. La ecuación (2.28) implica que también $(e - yx/\lambda)$ es invertible, es decir, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(\sigma(yx) \cup \{0\})$. Eso demuestra que $\sigma(yx) \cup \{0\} \subseteq \sigma(xy) \cup \{0\}$. La inclusión inversa sigue similarmente. □

2.31 Definición. En un álgebra de Banach con involución "$x \geq 0$" denota que x es autoadjunto y $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$.

2.32 Teorema. *Un B^*-álgebra A tiene las siguientes propiedades:*

(a) *Elementos autoadjuntos tienen espectros reales.*

(b) *Si $x \in A$ es normal entonces $\rho(x) = \|x\|$.*

(c) *Si $y \in A$ entonces $\rho(yy^*) = \|y\|^2$.*

(d) *Si $u, v \in A$ cumplen $u, v \geq 0$, entonces $u + v \geq 0$.*

(e) *Si $y \in A$ entonces $yy^* \geq 0$.*

(f) *Si $y \in A$ entonces $e + yy^*$ es invertible en A.*

Demostración. Si $x \in A$ es normal, existe un subconjunto normal maximal B de A que contiene x. Por los Teoremas 2.21 and 2.28 B es una B^*-álgebra conmutativa que es isomorfa isométricamente a $C(\Delta_B)$ mediante la transformación de Gelfand. Además se tiene

$$\sigma_A(z) = \sigma_B(z) = \hat{z}(\Delta_B) \qquad \text{para todo } z \in B. \tag{2.29}$$

Aquí $\hat{z}$ se refiere a la transformada de Gelfand respecto al álgebra B.

(a) Si x es autoadjunto, entonces el Teorema 2.21 y (2.29) aplicado a x implican que $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ porque $\hat{x}$ es real.

(b) Si x es normal entonces (2.29) implica que $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$. Como la transformación de Gelfand es isométrica en B, $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$.

(c) Si $y \in A$ entonces yy^* es autoadjunto, y (b) implica el reclamo.

(d) Pongamos $\alpha := \|u\|$, $\beta := \|v\|$, $w := u + v$ y $\gamma := \alpha + \beta$. Entonces $\sigma(u) \subseteq [0, \alpha]$ y luego

$$\sigma(\alpha e - u) \subseteq [0, \alpha] \tag{2.30}$$

por el teorema de la aplicación espectral (en el cálculo simbólico holomorfo), aplicado a la función $\lambda \mapsto \alpha - \lambda$. El inciso (b) dice que $\|\alpha e - u\| = \rho(\alpha e - u) \leq \alpha$. Por la misma razón, $\|\beta e - v\| \leq \beta$. Entonces

$$\|\gamma e - w\| \leq \gamma. \tag{2.31}$$

Como $w^* = w$, el inciso (a) implica que $\sigma(\gamma e - w)$ es real. Por lo tanto (2.31) implica

$$\sigma(\gamma e - w) \subseteq [-\gamma, \gamma]$$

El teorema de la aplicación espectral, utilizando la función $\lambda \mapsto \gamma - \lambda$, demuestra que en seguida
$$\sigma(w) \subseteq [0, 2\gamma],$$
es decir, $w \geq 0$.

(e) Sea $x := yy^*$ y sea B dado como antes de (2.29). Entonces x es autoadjunto y $\hat{x}$ es una función real en Δ_B. Por (2.29) basta demostrar que $\hat{x} \geq 0$.

Como $\hat{B} = C(\Delta_B)$, existe $z \in B$ tal que

$$\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x} \qquad \text{en } \Delta_B. \tag{2.32}$$

Entonces z es autoadjunto porque su transformada de Gelfand es real. Notemos que

$$\hat{z}^2\hat{x} = (\hat{x}^2 - 2|\hat{x}|\hat{x} + \hat{x}^2)\hat{x} = \hat{x}^2(2\hat{x} - 2|\hat{x}|) \leq 0. \tag{2.33}$$

Pongamos
$$w := zy = u + \mathrm{i}v,$$
donde u, v son elementos autoadjuntos de A. Observemos que w no es normal, y no conmuta con x, y, z. Se tiene

$$ww^* = zyy^*z^* = zxz = z^2x \tag{2.34}$$

y

$$\begin{aligned} w^*w + ww^* &= (u - \mathrm{i}v)(u + \mathrm{i}v) + (u + \mathrm{i}v)(u - \mathrm{i}v) \\ &= 2u^2 + 2v^2 + \mathrm{i}(uv - vu) + \mathrm{i}(vu - uv) = 2u^2 + 2v^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Las ecuaciones (2.34) y (2.35) implican

$$w^*w = 2u^2 + 2v^2 - ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x. \tag{2.36}$$

Como u es autoadjunto, $\sigma(u)$ es real, y $u^2 \geq 0$ por el teorema de la aplicación espectral. Similarmente, $v^2 \geq 0$.

Tenemos que $z^2x \in B$ es autoadjunto. La propiedad (2.33) implica que
$$\widehat{-z^2x} = -\hat{z}^2\hat{x} \geq 0,$$
es decir, $\sigma(-z^2x) \subseteq [0, \infty)$ por (2.29). Por lo tanto, $-z^2x \geq 0$. El inciso (d) y (2.36) implican $w^*w \geq 0$.

El Lema 2.30 dice que $\sigma(ww^*) \subseteq \sigma(w^*w) \cup \{0\}$ y, en consecuencia, que también $ww^* \geq 0$. Por (2.34) $\hat{z}^2\hat{x} \geq 0$, y (2.33) implica que $\hat{x} = |\hat{x}| \geq 0$, es decir, $x \geq 0$.

(f) Bajo el teorema de la aplicación espectral con la función $\lambda \mapsto 1 + \lambda$, este inciso es un corolario de (e). □

2.33 Teorema. *Sean A una B^*-álgebra, B una subálgebra cerrada de A, $e \in B$, y $x^* \in B$ para todo $x \in B$. Entonces $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ para todo $x \in B$.*

Demostración. Basta demostrar que $G(A) \cap B \subseteq B$. Sea $x \in G(A) \cap B$. Entonces $x^*, xx^* \in G(A) \cap B$ y por tanto $0 \notin \sigma_A(xx^*)$. El Teorema 2.32(e) dice que $\sigma(xx^*) \subseteq (0, \infty)$. El Corolario 1.17 implica que $\sigma_A(xx^*) = \sigma_B(xx^*)$. Eso demuestra que $xx^* \in G(B)$. Calculamos $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$ y obtenemos que $x \in G(B)$. □

2.34 Lema. *Sea X un espacio compacto y sean $\phi \in C(X)$ y $K := \phi(X)$. Definimos $\Lambda\colon C(K) \to C(X)$ por $\Lambda(f) := f \circ \phi$. Entonces Λ es un $*$-isomorfismo isométrico de $C(K)$ con una subálgebra cerrada de $C(X)$. Si ϕ es un homeomorfismo, entonces Λ tiene rango $C(X)$.*

Demostración. Obviamente Λ es un $*$-homomorfismo. Como $\phi\colon X \to K$ es suprayectivo, Λ es isométrico. Particularmente, Λ es un isomorfismo y homeomorfismo entre $C(K)$ y el rango de Λ. En seguida, el rango de Λ es una subálgebra cerrada de $C(X)$. Si ϕ es un homeomorfismo, entonces $\Lambda^{-1}(g) = g \circ \phi^{-1}$ está definido sobre todo $C(X)$ y $\Lambda(C(K)) = C(X)$. □

2.35 Teorema (Cálculo simbólico para funciones continuas)**.** *Sean A un B^*-álgebra, $x \in A$ normal y B la subálgebra cerrada de A generada por e, x y x^*. Entonces existe un $*$-isomorfismo isométrico $C(\sigma(x)) \to B$ que extiende el cálculo simbólico de funciones holomorfas. Escribimos $f(x)$ para el valor de ese cálculo en f. Se cumple $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ si $f \in C(\sigma(x))$.*

Demostración. Sea $\widetilde{B}$ el conjunto normal maximal que contiene x. Entonces $\widetilde{B}$ es una B^*-álgebra conmutativa y $\sigma_{\widetilde{B}}(x) = \sigma_A(x)$ por el Teorema 2.28. Como B es una subálgebra de $\widetilde{B}$, el Teorema 2.33 implica que $\sigma_B(x) = \sigma_{\widetilde{B}}(x) = \sigma_A(x)$.

Sea Δ el espacio de ideales maximales en B, y trabajemos con la transformación de Gelfand en B. Demostremos que $\hat{x}\colon \Delta \to \sigma(x)$ es un homeomorfismo. Primero recordemos que por el Teorema 2.10(c) $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$. Sean $h_1, h_2 \in \Delta$ tales que $\hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2)$. Entonces $h_1(x) = h_2(x)$ y $h_1(x^*) = \overline{h_1(x)} = \overline{h_2(x)} = h_2(x^*)$, por ecuación (2.23). Si P es un polinomio en dos variables, se sigue que

$$h_1(P(x, x^*)) = h_2(P(x, x^*))$$

porque h_1 y h_2 son homomorfismos. La definición de B y la continuidad de h_1, h_2 implican que $h_1 = h_2$. Eso demuestra que $\hat{x}\colon \Delta \to \sigma(x)$ es inyectivo. Como ambos espacios, Δ y $\sigma(x)$ son espacios compactos de Hausdorff, $\hat{x}$ es un homeomorfismo.

Sea $T\colon B \to C(\Delta)$ la transformación de Gelfand. Por el Teorema 2.21 T es un $*$-isomorfismo isométrico. Sea $\Lambda\colon C(\sigma(x)) \to C(\Delta)$ definido por $\Lambda(f) := f \circ \hat{x}$. El Lema 2.34 dice que $T^{-1} \circ \Lambda\colon C(\sigma(x)) \to B$ es un $*$-isomorfismo isométrico. Como $\hat{e} \equiv 1 = \Lambda(1)$ y $\hat{x} = \Lambda(\mathrm{id})$, ese cálculo simbólico es una extensión del cálculo simbólico para funciones holomorfas.

El teorema de la aplicación espectral es una consecuencia del Teorema 2.10(c). □

2.5. Funciones lineales positivas

2.36 Lema. *Sean X un espacio de Banach, A, B subespacios cerrados de X, y $X = A+B$ (la suma no necesariamente es directa). Entonces existe $\gamma \in [0, \infty)$ tal que todo $x \in X$ tiene una representación $x = a + b$ con $a \in A$, $b \in B$, y $\|a\| + \|b\| \leq \gamma\|x\|$.*

Demostración. Sea $Y := A \times B$ con la norma $\|(a, b)\|_Y := \|a\| + \|b\|$. Como A y B son completos Y es un espacio de Banach. El mapeo lineal $\Lambda\colon Y \to X$, definido por $\Lambda(a, b) := a + b$, es continuo porque $\|\Lambda(a, b)\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = \|(a, b)\|_Y$. Además, Λ es suprayectivo. El teorema de la aplicación abierta implica existencia de $\gamma > 0$ tal que

$$\{y \in X \mid \|y\| \leq 1/\gamma\} \subseteq \{\Lambda(a', b') \mid \|(a', b')\|_Y \leq 1/2\}.$$

Para $x \in X$ eso implica que existe $(a', b') \in Y$ que cumple $\|(a', b')\|_Y \leq 1/2$ y $\Lambda(a', b') = x/(\|x\|\gamma)$. Con $a := a'\|x\|\gamma$ y $b := b'\|x\|\gamma$ se sigue la afirmación. $\square$

2.37 Definición. Una *función lineal positiva* es una función lineal F en un álgebra de Banach A con involución que satisface

$$F(xx^*) \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{2.37}$$

2.38 Teorema. *Toda función lineal positiva F en un álgebra de Banach A con involución tiene las siguientes propiedades:*

(a) $F(x^*) = \overline{F(x)}$.

(b) $|F(xy^*)|^2 \leq F(xx^*)F(yy^*)$.

(c) $|F(x)|^2 \leq F(e)F(xx^*) \leq F(e)^2\rho(xx^*)$.

(d) $|F(x)| \leq F(e)\rho(x)$ *para todo $x \in A$ que es normal.*

(e) *F es una función lineal acotada en A. Además, $\|F\| = F(e)$ si A es conmutativo, y $\|F\| \leq \sqrt{\beta}\,F(e)$ si la involución satisface $\|x^*\| \leq \beta\|x\|$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Para $x, y \in A$ pongamos

$$p := F(xx^*), \quad q := F(yy^*), \quad r := F(xy^*), \quad s := F(yx^*).$$

Como $F((x + \alpha y)(x^* + \bar{\alpha}y^*)) \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$p + \bar{\alpha}r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geq 0 \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.38}$$

(a) Por (2.37) $p, q \geq 0$. Con $\alpha = 1$ y $\alpha = i$ la ecuación (2.38) implica

$$\begin{aligned} p + q + r + s &\geq 0, \\ p + q + \mathrm{i}(s - r) &\geq 0, \end{aligned}$$

es decir, $s + r$ y $\mathrm{i}(s - r)$ son números reales. Eso implica

$$\bar{r} + \bar{s} = r + s, \tag{2.39}$$

$$-\mathrm{i}(\bar{s} - \bar{r}) = \mathrm{i}(s - r). \tag{2.40}$$

Sumar ecuación (2.39) y $-\mathrm{i}$ veces la ecuación (2.40) da $\bar{r} = s$. Si pongamos $y = e$ entonces eso es (a).

(b) Para $r = 0$ (b) es obvio. Si $r \neq 0$ entonces consideramos (2.38) con $\alpha := tr/|r|$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y obtenemos

$$p + 2t|r| + t^2 q \geq 0 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

Si $q = 0$, entonces claramente $r = 0$ y se cumple (b). Si $q \neq 0$ entonces consideramos $t = -|r|/q$ y obtenemos

$$0 \leq p - 2\frac{|r|^2}{q} + \frac{|r|^2}{q} = p - \frac{|r|^2}{q},$$

es decir, $|r|^2 \leq pq$. Eso es (b).

(c) Como $ee^* = e$, la primera desigualdad en (c) es un caso especial de (b). Para la otra, sea $t > \rho(xx^*)$. Por el teorema de la aplicación espectral, eso implica que $\sigma(te - xx^*) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$. El Teorema 2.29 implica la existencia de una raíz cuadrada autoadjunta $u \in A$ de $te - xx^*$. En seguida,

$$tF(e) - F(xx^*) = F(u^2) \geq 0$$

y luego

$$F(xx^*) \leq tF(e) \qquad \text{para todo } t > \rho(xx^*).$$

Formando el ínfimo sobre aquellos t (y considerando que $F(e) = F(ee^*) \geq 0$) se obtiene la segunda desigualdad de (c).

(d) Si x es normal entonces el Teorema 2.26 dice que $\sigma(xx^*) \subseteq \sigma(x)\sigma(x^*)$ y luego, con el Teorema 2.17(e),

$$\rho(xx^*) \leq \rho(x)\rho(x^*) = \rho(x)^2.$$

Con (c) eso implica

$$|F(x)|^2 \leq F(e)^2 \rho(xx^*) \leq F(e)^2 \rho(x)^2,$$

es decir, (d).

(e) Primero demostremos los casos especiales. Sea A conmutativa. Entonces (d) se cumple para todo $x \in A$ y por tanto

$$|F(x)| \leq F(e)\rho(x) \leq F(e)\|x\| \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Por otro lado, como $F(e) \geq 0$

$$F(e) = \max_{\substack{x \in A \\ \|x\|=1}} |F(x)|.$$

Esas ecuaciones implican que $\|F\| = F(e)$.

Para la otra especialización de (e) supongamos que existe $\beta \geq 0$ tal que $\|x^*\| \leq \beta\|x\|$ para todo $x \in A$. Usando (c) obtenemos

$$|F(x)|^2 \leq F(e)^2\rho(xx^*) \leq F(e)^2\|xx^*\| \leq F(e)^2\|x\|\,\|x^*\| \leq F(e)^2\beta\|x\|^2,$$

es decir, $\|F\| \leq \sqrt{\beta}\,F(e)$.

Antes de pasar a la demostración del caso general, notemos que $F \equiv 0$ si $F(e) = 0$. Eso es una consecuencia de (c). Normalizando F podemos suponer que $F(e) = 1$, el caso $F \equiv 0$ siendo trivial.

Sea H el conjunto de los elementos autoadjuntos de A. Entonces H y $\mathrm{i}H$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, y $A = H + \mathrm{i}H$, por el Teorema 2.17(b). Por el inciso (d) la restricción de F a H es una función real-lineal con norma 1. El teorema de Hahn-Banach dice que existe una extensión real-lineal Φ de F a $\overline{H}$ con norma 1. Demostremos que

$$\Phi(y) = 0 \qquad \text{para todo } y \in \overline{H} \cap \mathrm{i}\overline{H}. \tag{2.42}$$

Sea $y = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{i}v_n$ con $(u_n), (v_n) \subseteq H$. Se tiene que $u_n^2 \to y^2$, $v_n^2 \to -y^2$ cuando $n \to \infty$. En seguida (c) y (d) implican

$$\|F(u_n)\|^2 \leq F(u_n^2) \leq F(u_n^2 + v_n^2) \leq \|u_n^2 + v_n^2\| \to 0.$$

por lo tanto, $\Phi(y) = \lim_{n\to\infty} F(u_n) = 0$.

El Lema 2.36 implica la existencia de $\gamma > 0$ tal que todo $x \in A$ tiene una representación

$$x = x_1 + \mathrm{i}x_2, \qquad x_1, x_2 \in \overline{H}, \qquad \|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma\|x\|.$$

Por otro lado, un $x \in A$ tiene una representación $x = u + \mathrm{i}v$, donde $u, v \in H$. Restando esas dos representaciones de x se sigue que

$$x_1 - u = \mathrm{i}(v - x_2),$$

es decir, $x_1 - u$ y $x_2 - v$ son elementos de $\overline{H} \cap \mathrm{i}\overline{H}$. En consecuencia, (2.42) implica que

$$F(x) = F(u) + \mathrm{i}F(v) = \Phi(x_1) + \mathrm{i}\Phi(x_2),$$

y por lo tanto

$$|F(x)| \leq |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma\|x\|.$$

$\square$

3. Operadores acotados en un espacio de Hilbert

3.1. Hechos básicos

3.1 Definición. En un espacio vectorial complejo H un *producto escalar* es un mapeo $H \times H \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ tal que se cumplen para $x, y, z \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

(I) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,

(II) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(III) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(IV) $\langle x, x\rangle \geq 0$,

(V) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Generalmente, un mapeo que es lineal en en primer y conjugado-lineal en el segundo argumento como el producto escalar se conoce como *mapeo sesquilineal*.

Si $\langle x, y\rangle = 0$ entonces x y y son *ortogonales*, también escrito $x \perp y$. Ortogonalidad es una relación simétrica. Si E, F son subconjuntos de E entonces $E \perp F$ significa que $x \perp y$ para todo $x \in E$ y $y \in F$. $E^{\perp}$ es el conjunto de todos $y \in H$ que son ortogonales a todo $x \in E$.

Escribimos para $x \in H$
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

3.2 Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Si H es un espacio vectorial con producto escalar y $x, y \in H$, entonces:*

(a) *Se cumple la* desigualdad de Cauchy-Schwarz*:*
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \textit{para todo } x, y \in H.$$

(b) *Para todo $x, y \in H$ se cumple: $x \perp y$ si y sólo si $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(c) *$\|\cdot\|$ es una norma en H.*

(d) *Para todo $y \in H$ la función lineal $f_y := \langle \cdot, y\rangle$ es continua y tiene norma $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$.*

(e) *Se cumple la* desigualdad del paralelogramo*:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \textit{para todo } x, y \in H.$$

Demostración. **(a)** Para $x = 0$ no hay nada que demostrar. Entonces supongamos que $x \neq 0$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \geq 0. \tag{3.1}$$

Sea $\lambda_0 := -\overline{\langle x, y\rangle}/\|x\|^2$. Entonces

$$0 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}. \tag{3.2}$$

(b) La parte "sólo si" es una consecuencia de $\|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Inversamente, si $x \neq 0$ y λ_0 es como en la demostración del inciso (a), se sigue de (3.2) que

$$\|y\|^2 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}.$$

En consecuencia, $\langle x, y\rangle = 0$.

(c) Las propiedades de la definidad positiva y $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ son triviales. La desigualdad del triángulo se verifica usando (a):

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(d) Eso se sigue de (a) y de $\langle y, y\rangle = \|y\|\,\|y\|$.

(e) Es un cálculo fácil. □

3.3 Definición. Siempre normamos un espacio H con producto escalar con la norma dada en el Teorema 3.2. Si ese espacio normado es completo, entonces llamamos H un *espacio de Hilbert*.

A lo largo de todo el resto de este capitulo H denotará un espacio de Hilbert no trivial.

3.4 Teorema. *Para todo subconjunto cerrado convexo y no vacío $E \subseteq H$ y para todo $x^* \in H$ existe $y^* \in E$ tal que $\|y^* - x^*\| = \operatorname{dist}(x^*, E)$.*

Demostración. Reemplazando E por $E - x^*$ podemos suponer que $x^* = 0$ porque $y^* \in E$ y $\|y^* - x^*\| = \inf_{y\in E}\|y - x^*\|$ es equivalente a $y^* - x^* \in E - x^*$ y $\|y^* - x^*\| = \inf_{y\in E-x^*}\|y\|$.

Pongamos $d := \inf\{\|y\| \mid y \in E\}$. Sea $(y_n) \subseteq E$ tal que $\|y_n\| \to d$ cuando $n \to \infty$. Por la convexidad de E, se tiene que $(y_n + y_m)/2 \in E$ y luego que $\|y_n + y_m\|^2 \geq 4d^2$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. La ley del paralelogramo dice que

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - \|y_n + y_m\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$, es decir, (y_n) es una sucesión de Cauchy. Existe $y^* \in E$ tal que $\|y^*\| = d$. Para cualquier $z \in E$ con $\|z\| = d$, la sucesión $y^*, z, y^*, z, \ldots$ converge, igual como (y_n). En seguida, $z = y^*$, es decir, el mínimo es único. □

3.5 Teorema. *Sea E un subespacio de H.*

(a) $E^\perp$ *es cerrado,*

(b) $E^\perp = (\overline{E})^\perp$,

(c) $H = \overline{E} \oplus E^\perp$,

(d) $E^{\perp\perp} := (E^\perp)^\perp = \overline{E}$.

Demostración. **(a)** Para todo $x \in H$ el Teorema 3.2(d) implica que $x^\perp$ es cerrado porque es el núcleo de la función lineal continua f_x. Entonces

$$E^\perp = \bigcap_{x\in E} x^\perp$$

también es cerrado.

(b) Es claro que $(\overline{E})^\perp \subseteq E^\perp$. Inversamente, consideramos $y \in E^\perp$. Entonces $E \subseteq y^\perp$. Como $y^\perp$ es cerrado, $\overline{E} \subseteq y^\perp$, es decir que $y \in (\overline{E})^\perp$.

(c) Es claro que $\overline{E} \cap E^\perp = \{0\}$. Para cada $x^* \in H$ hay que agarrar $y^* \in \overline{E}$ y $z^* \in E^\perp$ tales que $x^* = y^* + z^*$.

Sea $y^* \in \overline{E}$ el elemento único que cumple $\|y^* - x^*\| = \operatorname{dist}(x^*, \overline{E})$, dado por el Teorema 3.4. Pongamos $z^* := x^* - y^*$. Para todo $y \in \overline{E}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\|z^*\| = \|y^* - x^*\| \le \|y^* + \lambda y - x^*\| = \|z^* + \lambda y\|$$

porque $y^* + \lambda y \in \overline{E}$. Usando el Teorema 3.2(b) se tiene que $z^* \perp y$ para todo $y \in \overline{E}$. Por lo tanto, $z^* \in E^\perp$.

(d) Si $x \in E$, entonces $(x, y) = 0$ para todo $y \in E^\perp$. Se sigue que $x \in (E^\perp)^\perp$. Como eso se cumple para todo $x \in E$ entonces $E \subseteq E^{\perp\perp}$. Como $E^{\perp\perp}$ es cerrado por (a), también $\overline{E} \subseteq E^{\perp\perp}$. Por otro lado, si $x \in E^{\perp\perp}$ demostraremos que $x \in \overline{E}$. Por (c), existen $y \in \overline{E}$ y $z \in E^\perp$ tales que $x = y + z$. Como $x \perp z$ y $y \perp z$, obtenemos

$$0 = (x, z) = (y + z, z) = (y, z) + (z, z) = \|z\|^2,$$

es decir, $z = 0$ y $x = y \in \overline{E}$. □

3.6 Teorema (Representación de Riesz)**.** *Existe una isometría conjugada-lineal suprayectiva $H \to H^*$, $y \mapsto \Lambda$, dada por*

$$\Lambda x := \langle x, y \rangle \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

Demostración. Es obvio que ese mapeo es una isometría conjugada-lineal. Para demostrar suprayectividad, sea $\Lambda \in H^*$. Si $\Lambda = 0$ entonces se toma $y := 0$. Si $\Lambda \neq 0$, entonces existe $z \in \mathcal{N}(\Lambda)^\perp \setminus \{0\}$. Sea $x \in H$. Como

$$(\Lambda x)z - (\Lambda z)x \in \mathcal{N}(\Lambda),$$

se tiene
$$(\Lambda x)\|z\|^2 - (\Lambda z)\langle x, z\rangle = 0,$$
es decir,
$$\Lambda x = \left\langle x, \frac{(\overline{\Lambda z})z}{\|z\|^2} \right\rangle.$$
Se toma
$$y := \frac{(\overline{\Lambda z})z}{\|z\|^2}.$$
□

3.7 Teorema. *Sea (x_n) una sucesión de vectores en H que son ortogonales dos a dos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge en norma,*

(II) $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k, y\rangle$ *converge para todo $y \in H$,*

(III) $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2 < \infty$.

Demostración. Escribimos $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$.
(I) implica (II): Suponiendo (I),
$$\sum_{k=1}^{n}\langle x_k, y\rangle = \langle s_n, y\rangle$$
converge cuando $n \to \infty$, por la continuidad de $\langle \cdot\,, y\rangle$.
(II) implica (III): Suponiendo (II), definimos $\Lambda_n \in H^*$ por
$$\Lambda_n y := \sum_{k=1}^{n}\langle y, x_k\rangle = \overline{\sum_{k=1}^{n}\langle x_k, y\rangle}.$$
Entonces $\Lambda_n y$ converge para todo $y \in H$. El teorema de Banach-Steinhaus implica que $\|\Lambda_n\|$ queda acotada cuando $n \to \infty$. Además, el Teorema 3.2(d) dice que
$$\|\Lambda_n\|^2 = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$
Por lo tanto se obtiene (III).
(III) implica (I): Suponiendo (III),
$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n-1}^{m}\|x_k\|^2$$
para $m \geq n$ implica que (s_n) es una sucesión de Cauchy en H. En seguida, (s_n) converge.
□

3.2. Operadores acotados

Sea $\mathcal{B}(H)$ el álgebra de Banach de los operadores lineales acotados en H.

3.8 Teorema. *Si* $T \in \mathcal{B}(H)$ *y* $\langle Tx, x\rangle = 0$ *para todo* $x \in H$*, entonces* $T = 0$.

Demostración. Como

$$0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle, \tag{3.3}$$

obtenemos

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \tag{3.4}$$

para todo $x, y \in H$. Reemplazando y por iy en la última identidad, obtenemos

$$-\mathrm{i}\langle Tx, y\rangle + \mathrm{i}\langle Ty, x\rangle = 0 \tag{3.5}$$

para todo $x, y \in H$. Sumando (3.4) con i-veces (3.5) se tiene

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \qquad \text{para todo } x, y \in H.$$

Con $y := Tx$ eso implica $\|Tx\|^2 = 0$, es decir, $Tx = 0$, para todo $x \in H$. □

3.9 Nota. El Teorema 3.8 no es cierto en espacios de Hilbert reales. Un contraejemplo son rotaciones en $\mathbb{R}^2$. Para hacerlo válido, uno podría suponer adicionalmente que T sea simétrico.

3.10 Teorema. *Si* $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ *es sesquilineal y acotado en el sentido siguiente:*

$$M := \sup\{|f(x,y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty, \tag{3.6}$$

entonces existe un y sólo un $S \in \mathcal{B}(H)$ *tal que*

$$f(x,y) = \langle x, Sy\rangle \qquad \textit{para todo } x, y \in H. \tag{3.7}$$

En ese caso, $\|S\| = M$.

Demostración. Como $|f(x,y)| \le M\|x\|\,\|y\|$, el mapeo $x \mapsto f(x,y)$ es una función lineal acotada en H, para todo $y \in H$. Su norma es por lo mas $M\|y\|$. El Teorema 3.6 dice que existe un y sólo un elemento $Sy \in H$ tal que se cumple (3.7). Además, $\|Sy\| \le M\|y\|$. Es claro que S es aditivo. Para $\alpha \in H$ tenemos

$$\langle x, S(\alpha y)\rangle = f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x,y) = \bar{\alpha}\langle x, Sy\rangle = \langle x, \alpha Sy\rangle,$$

es decir, S es lineal (por su unicidad). Entonces $S \in \mathcal{B}(H)$ y $\|S\| \le M$. Por otro lado,

$$|f(x,y)| = |\langle x, Sy\rangle| \le \|x\|\,\|Sy\| \le \|x\|\,\|S\|\,\|y\|,$$

y luego $M \le \|S\|$. □

3.11 Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces existe $T^* \in \mathcal{B}$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad \text{para todo } x, y \in H. \tag{3.8}$$

Además,

$$\|T^*\| = \|T\|, \tag{3.9}$$

el mapeo $T \mapsto T^*$ es una involución y $\mathcal{B}(H)$ es una B^*-álgebra.

Demostración. El mapeo

$$(x, y) \mapsto \langle Tx, y\rangle \tag{3.10}$$

es sesquilineal y acotado. Por el Teorema 3.10 existe un y sólo un $T^* \in \mathcal{B}(H)$ que cumple (3.8). Se tiene

$$M := \sup\{|\langle Tx, y\rangle| \mid \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \|T\| \tag{3.11}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por otro lado,

$$M \geq \left|\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle\right| = \|Tx\| \qquad \text{para todo } x \in H,\ \|x\| = 1. \tag{3.12}$$

Se sigue que $M \geq \|T\|$. Junto con (3.11) eso demuestra que $\|T\| = M$ y luego $\|T^*\| = \|T\|$, por el Teorema 3.10.

Demostremos que $T \mapsto T^*$ define una involución. La identidad $(S + T)^* = S^* + T^*$ es obvia porqué (3.10) es aditivo en ambos argumentos. Las computaciones

$$\begin{gathered}
\langle \alpha Tx, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\alpha}T^*y\rangle, \\
\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle, \\
\langle Tx, y\rangle = \overline{\langle T^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, T^{**}x\rangle} = \langle T^{**}x, y\rangle,
\end{gathered}$$

junto con la unicidad de T^* y el Teorema 3.8 implican que $T \mapsto T^*$ es conjugado-lineal con período 2, y que se tiene $(ST)^* = T^*S^*$. Eso demuestra todas las propiedades de una involución.

Observemos que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\|\,\|x\|^2$$

para todo $x \in H$ implica $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Por otro lado, (3.9) implica

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2.$$

Eso demuestra que $\mathcal{B}(H)$ es una B^*-álgebra. $\square$

3.12 Nota. El operador T^* definido en el Teorema 3.11 es llamado el *operador adjunto de Hilbert* para diferenciarlo del operador adjunto (o dual) de un operador lineal acotado entre espacios de Banach. En el primer caso $T \mapsto T^*$ es una aplicación conjugada-lineal, en el segundo caso es lineal.

3.13 Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces*

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp} \qquad y \qquad \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}.$$

Demostración. Para el primer reclamo basta considerar la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
& & T^*y &= 0, & & \\
&\Leftrightarrow & \langle x, T^*y\rangle &= 0, & &\text{para todo } x \in H, \\
&\Leftrightarrow & \langle Tx, y\rangle &= 0, & &\text{para todo } x \in H, \\
&\Leftrightarrow & y &\in \mathcal{R}(T)^{\perp}. & &
\end{aligned}$$

El segundo reclamo se obtiene del primero porque $T^{**} = T$. □

3.14 Definición. Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se llama

(a) *normal* si $TT^* = T^*T$,

(b) *autoadjunto* (o *hermitiano*) si $T^* = T$,

(c) *unitario* si $T^*T = I = TT^*$,

(d) una *proyección* si $T^2 = T$.

3.15 Teorema. *Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es normal si y sólo si*

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \qquad \textit{para todo } x \in H. \tag{3.13}$$

Un operador normal T tiene las siguientes propiedades:

(a) *$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$.*

(b) *$\mathcal{R}(T)$ es denso en H si y sólo si T es inyectivo.*

(c) *T es invertible si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ para todo $x \in H$.*

(d) *Si $Tx = \alpha x$ para algunos $x \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces $T^*x = \bar{\alpha}x$.*

(e) *Si α, β son valores propios distintos de T, entonces vectores propios correspondientes son ortogonales.*

Demostración. Por

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

el primer enunciado es cierto. El inciso (a) es una consecuencia directa. Por (a) y el Teorema 3.13 tenemos la siguiente cadena de equivalencias que demuestra (b):

$$\mathcal{R}(T) \text{ es denso} \Leftrightarrow \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(T) = \{0\} \Leftrightarrow T \text{ es inyectivo.}$$

Sea $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq \delta\|x\| \qquad \text{para todo } x \in H. \tag{3.14}$$

Entonces T es inyectivo y luego tiene rango denso, por (b). Se comprueba similarmente como en la demostración del Teorema 2.14(b) que el rango de T es cerrado, es decir, $\mathcal{R}(T) = H$. La inversa es continua por (3.14), es decir, T es invertible en $\mathcal{B}(H)$. Inversamente, sea T invertible en $\mathcal{B}(H)$. Entonces el teorema de la aplicación abierta implica la existencia de $\delta > 0$ que cumple (3.14).

Sea $Tx = \alpha x$. Entonces $x \in \mathcal{N}(T - \alpha I) = \mathcal{N}(T^* - \bar{\alpha} I)$ por (a) y se cumple $T^*x = \bar{\alpha}x$. Eso comprueba (d).

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y \in H$ son tales que $\alpha \neq \beta$ y $Tx = \alpha x$ y $Ty = \beta y$, entonces por (d) se tiene

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\beta}y\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

En seguida $\alpha \neq \beta$ implica que $x \perp y$. Hemos demostrado (e) □

3.16 Teorema. *Para $U \in \mathcal{B}(H)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *U es unitario.*

(II) *$\mathcal{R}(U) = H$ y $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in H$.*

(III) *$\mathcal{R}(U) = H$ y $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.*

Demostración. (I) implica (II): Como U es unitario, es invertible en $\mathcal{B}(H)$ y luego $\mathcal{R}(U) = U$. Además,

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(II) implica (III): Es obvio.

(III) implica (I): Como

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle,$$

el Teorema 3.8 dice que $U^*U = I$. Por otro lado, las hipótesis implican que U es una isometría suprayectiva, es decir, es invertible en $\mathcal{B}(H)$. Entonces $U^{-1} = U^*$ y U es unitario. □

3.17 Teorema. *Si $P \in \mathcal{B}(H)$ es una proyección, entonces son equivalentes:*

(I) *P es autoadjunta.*

(II) *P es normal.*

(III) *$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$.*

(IV) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ para todo $x \in H$.*

En ese caso, P es una proyección ortogonal.

Dos proyecciones ortogonales P, Q cumplen $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{R}(Q)$ si y sólo si $PQ = 0$.

Demostración. (I) implica (II) trivialmente.

(II) implica (III): El Teorema 3.15(a) dice que $\mathcal{R}(P)^\perp = \mathcal{N}(P)$. Como P es una proyección, $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$, es decir, $\mathcal{R}(P)$ es cerrado. Por el Teorema 3.5(d) se tiene $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P)^{\perp\perp} = \mathcal{N}(P)^\perp$.

(III) implica (IV): Sea $x \in H$. Como $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp = \mathcal{R}(I - P)^\perp$, se tiene

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px + (I - P)x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2.$$

(IV) implica (I): Para todo $x \in H$ $\|Px\|^2$ es real. En seguida,

$$\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle = \langle x, P^*x\rangle = \langle P^*x, x\rangle.$$

El Teorema 3.8 dice que $P^* = P$. □

3.18 Teorema. *Si $U \in \mathcal{B}(H)$ es unitario y $\lambda \in \sigma(U)$, entonces $|\lambda| = 1$.*

Demostración. Por el Teorema 3.16 $\|U\| = 1$ y luego $|\lambda| \leq 1$.

Por otro lado, si $|\lambda| < 1$, entonces $\|\lambda U^*\| < 1$ y

$$\lambda I - U = -U(I - \lambda U^*)$$

es invertible en $\mathcal{B}(H)$, por el Teorema 1.6. Eso demuestra que $\lambda \notin \sigma(U)$. □

3.3. Un teorema de conmutatividad

3.19 Teorema (Fuglede, Putnam y Rosenblum)**.** *Sean $M, N, T \in \mathcal{B}(H)$, M, N normales y tales que*

$$MT = TN. \tag{3.15}$$

Entonces $M^*T = TN^*$.

Demostración. Primero consideramos $S \in \mathcal{B}(H)$ y $V := S - S^*$. Definimos

$$Q := \exp(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) V^k.$$

Se sigue que $V^* = -V$ y luego

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1},$$

es decir, Q es unitario. Eso implica por el Teorema 3.16 que

$$\|\exp(S - S^*)\| = 1 \qquad \text{para todo } S \in \mathcal{B}(H). \tag{3.16}$$

Bajo la hipótesis (3.15) se tiene $M^k T = T N^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$\exp(M)T = T\exp(N)$$

o

$$T = \exp(-M)T\exp(N). \tag{3.17}$$

Pongamos $U_1 := \exp(M^* - M)$ y $U_2 := \exp(N - N^*)$. Como M, N son normales podemos aplicar (1.33). Por lo tanto, (3.17) implica

$$\exp(M^*)T\exp(-N^*) = U_1 T U_2.$$

Por (3.16) eso implica

$$\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\| \leq \|T\|. \tag{3.18}$$

Definimos $f \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(H)$ por

$$f(\lambda) := \exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*).$$

Reemplazando M por $\bar{\lambda} M$ y N por $\bar{\lambda} N$, (3.18) dice que $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cualquier $\Lambda \in \mathcal{B}(H)^*$ (el dual de $\mathcal{B}(H)$), Λf es una función entera acotada. El teorema de Liouville implica que

$$(\Lambda f)(\lambda) = (\Lambda f)(0) \qquad \text{para todo } \Lambda \in \mathcal{B}(H)^*,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Entonces $f(\lambda) = f(0) = T$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por la definición de f hemos probado que

$$\exp(\lambda M^*)T = T\exp(\lambda N^*) \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ambos lados de esa ecuación son funciones holomorfas, y una derivación, evaluada en $\lambda = 0$, da el resultado $M^*T = TN^*$. $\square$

3.4. Resoluciones de la identidad

3.20 Definición. Sea $\mathcal{M}$ un σ-álgebra en un conjunto Ω. Una *resolución de la identidad en* $\mathcal{M}$ es un mapeo $E\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$ con las siguientes propiedades:

(a) $E(\varnothing) = 0$ y $E(\Omega) = I$.

(b) Todo $E(\omega)$ es una proyección ortogonal.

(c) $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)E(\omega_2)$.

(d) Si $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$, entonces $E(\omega_1 \cup \omega_2) = E(\omega_1) + E(\omega_2)$.

(e) Para todo $x, y \in H$, la función $E_{x,y}\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, definida por

$$E_{x,y}(\omega) := \langle E(\omega)x, y\rangle, \tag{3.19}$$

es una medida compleja en $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en un espacio de Hausdorff compacto o localmente compacto, entonces también se pide que $E_{x,y}$ sea regular para todo $x, y \in H$.

3.21 Nota. Sea E una resolución de la identidad. Entonces $E_{x,x}$ es una medida positiva en $\mathcal{M}$ con variación total $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$. Todas proyecciones $E(\omega)$ conmutan dos a dos. Si $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$, entonces los rangos de $E(\omega_1)$ y $E(\omega_2)$ son ortogonales, por el Teorema 3.17.

3.22 Proposición. *Si E es una resolución de la identidad y $x \in H$, entonces el mapeo $\omega \mapsto E(\omega)x$ es una medida numerablemente aditiva, tomando valores en H.*

Demostración. Sea $(\omega_n) \subseteq \mathcal{M}$ una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos, y sea $\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$. Se sigue que $E(\omega_m)x$ y $E(\omega_n)x$ son ortogonales cuando $m \neq n$. Como $E_{x,y}$ es una medida numerablemente aditiva, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\omega_n)x, y\rangle = \langle E(\omega)x, y\rangle \qquad \text{para todo } y \in H.$$

en seguida, el Teorema 3.7 implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E(\omega)x.$$

□

3.23 Nota. En general una resolución de la identidad no es numerablemente aditiva porque las proyecciones ortogonales no cero tienen norma 1. Eso implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)$$

no converge en norma.

3.24 Proposición. *Sea E una resolución de la identidad. Sean $(\omega_n) \subseteq \mathcal{M}$ y $\omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$. Si $E(\omega_n) = 0$ para todo n, entonces $E(\omega) = 0$.*

Demostración. Para $x \in H$ la medida $E_{x,x}$ es numerablemente aditiva. En seguida, $0 = E_{x,x}(\omega) = \|E(\omega)x\|^2$. Eso implica que $E(\omega) = 0$. □

Sea E una resolución de la identidad en $\mathcal{M}$, una σ-álgebra sobre un conjunto Ω. Sea $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ el álgebra de las funciones medibles y acotadas $\Omega \to \mathbb{C}$. Con la norma $\|f\|_A := \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$ obviamente A es un álgebra de Banach.

Existe una base de la topología de $\mathbb{C}$, formada por una colección numerable de discos abiertos. Si $f \in A$ entonces consideramos la unión U de todos aquellos discos U_k que cumplen $E(f^{-1}(U_k)) = 0$ y llamemos a $\mathbb{C}\backslash U$ el *rango esencial de f (respecto a la resolución de la identidad E)*. El conjunto U es el conjunto abierto mas grande que cumple $E(f^{-1}(U)) = 0$, y el rango esencial $\mathcal{R}_{\text{ess}}(f)$ de f es el conjunto cerrado mas chico que contiene $f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, respecto a la noción de conjuntos de medida cero inducida por E.

Decimos que f es esencialmente acotado si su rango esencial es acotado. En ese caso el rango esencial es compacto. Denotemos por $\|f\|_\infty$ el máximo de $|\lambda|$, donde λ varia sobre el rango esencial. El número $\|f\|_\infty$ se llama el *supremo esencial* de f.

Si definimos $N := \{f \in A \mid \|f\|_\infty = 0\}$, entonces N es un ideal cerrado de A. Ponemos $L^\infty(E) := A/N$. Se sigue que la norma inducida de una clase $[f]$ coincide con $\|f\|_\infty$, que $L^\infty(E)$ es un álgebra de Banach y que el espectro $\sigma([f])$ coincide con el rango esencial de f. Como es usual en la teoría de la medida, identificaremos f con su clase $[f]$.

El rango y el supremo esencial de una función respecto a una medida compleja se define similarmente como antes respecto a una resolución de la identidad.

3.25 Lema. *Sean $x, y \in H$, y sean $\|\cdot\|_{\infty,E}$ y $\|\cdot\|_{\infty,E_{x,y}}$ los supremos esenciales respecto a la resolución de la identidad E y respecto a la medida compleja $E_{x,y}$. Entonces se cumple $\|f\|_{\infty,E_{x,y}} \le \|f\|_{\infty,E}$ para todo $f \in L^\infty(E)$.*

Demostración. Sea R es rango esencial de f respecto a E, y sea $R_{x,y}$ el rango esencial de f respecto a $E_{x,y}$. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y tal que $E(f^{-1}(U)) = 0$, entonces obviamente $E_{x,y}(f^{-1}(U)) = 0$. Eso implica que $R_{x,y} \subseteq R$ y comprueba el enunciado. □

3.26 Teorema. *Sea E una resolución de la identidad como en la Definición* 3.20*. Entonces existe un *-isomorfismo isométrico Ψ entre $L^\infty(E)$ y una subálgebra cerrada normal A de $\mathcal{B}(H)$ que es relacionado con E por la fórmula*

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f \,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x, y \in H,\ f \in L^\infty(\Omega). \tag{3.20}$$

Eso justifica la notación

$$\Psi(f) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}E. \tag{3.21}$$

Se tiene

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \qquad \text{para todo } x \in H,\ f \in L^\infty(E). \tag{3.22}$$

Se cumple el hecho de la aplicación espectral: $\sigma(\Psi(f)) = \mathcal{R}_{\mathrm{ess}}(f)$.
Un operador $Q \in \mathcal{B}(H)$ *conmuta con todo* $E(\omega)$ *si y sólo si* Q *conmuta con todo* $\Psi(f)$.

Demostración. Demostremos el teorema primero para funciones simples en Ω. Sea $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subseteq \mathcal{M}$ una partición de Ω, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Definimos la función simple $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$f(x) := \alpha_k \qquad \text{si } x \in \omega_k.$$

Definimos $\Psi \in \mathcal{B}(H)$ por

$$\Psi(f) := \sum_{k=1}^n \alpha_k E(\omega_k). \tag{3.23}$$

Como los $E(\omega_k)$ son proyecciones autoadjuntas, se tiene

$$\Psi(f)^* = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k E(\omega_k) = \Psi(\bar{f}). \tag{3.24}$$

Si $\{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_m\} \subseteq \mathcal{M}$ es otra partición de ese tipo entonces $\omega_k = \sum_{\ell=1}^m \omega_k \cap \omega'_\ell$ para todo k y $\omega'_\ell = \sum_{k=1}^n \omega_k \cap \omega'_\ell$ para todo ℓ. La colección $\{\omega_k \cap \omega'_\ell\}_{k,\ell}$ forma una partición de Ω por elementos de $\mathcal{M}$.

Si g es una función simple en Ω tal que $g = \beta_\ell$ en ω_ℓ para $\ell = 1, 2, \dots, m$, entonces fg es la función simple que equivale a $\alpha_k\beta_\ell$ en $\omega_k \cap \omega_\ell$. Calculamos, usando el inciso (c) de la Definición 3.20:

$$\Psi(f)\Psi(g) = \sum_{k,\ell} \alpha_k\beta_\ell E(\omega_k)E(\omega'_\ell) = \sum_{k,\ell} \alpha_k\beta_\ell E(\omega_k \cap \omega'_\ell).$$

Se sigue que

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg). \tag{3.25}$$

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la función $\alpha f + \beta g$ es simple y equivale a $\alpha\alpha_k + \beta\beta_\ell$ en $\omega_k \cap \omega_\ell$. El inciso (d) de la Definición 3.20 implica que $E(\omega_k) = \sum_{\ell=1}^m E(\omega_k \cap \omega'_\ell)$ para todo k y $E(\omega_\ell) = \sum_{k=1}^n E(\omega_k \cap \omega'_\ell)$ para todo ℓ. Obtenemos

$$\alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g) = \sum_{k=1}^n \alpha\alpha_k E(\omega_k) + \sum_{\ell=1}^m \beta\beta_\ell E(\omega'_\ell) = \sum_{k,\ell} (\alpha\alpha_k + \beta\beta_\ell) E(\omega_k \cap \omega'_\ell),$$

es decir,

$$\alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g) = \Psi(\alpha f + \beta g). \tag{3.26}$$

Para $x, y \in H$ la definición de $\Psi(f)$ implica

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle E(\omega_k)x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E_{x,y}(\omega_k) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}E_{x,y}. \tag{3.27}$$

Por (3.24) y (3.25)

$$\Psi(f)^*\Psi(f) = \Psi(\bar{f})\Psi(f) = \Psi(\bar{f}f) = \Psi(|f|^2).$$

Con eso (3.27) implica

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \langle \Psi(f)^*\Psi(f)x, x\rangle = \langle \Psi(|f|^2)x, x\rangle = \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \tag{3.28}$$

y luego, por la Nota 3.21 y el Lema 3.25,

$$\|\Psi(f)x\| \leq \|f\|_{\infty,E_{x,x}} \sqrt{E_{x,x}(\Omega)} \leq \|f\|_\infty \sqrt{E_{x,x}(\Omega)} = \|f\|_\infty \|x\|. \tag{3.29}$$

Aquí $\|f\|_{\infty,E_{x,x}}$ denota el supremo esencial de f respecto a la medida positiva $E_{x,x}$.

Por otro lado, escogemos k tal que $|\alpha_k| = \|f\|_\infty$ y $E(\omega_k) \neq 0$. Eso es posible porque el rango de f consiste de un número finito de puntos α_ℓ. Existe $x \in \mathcal{R}(E(\omega_k))$ tal que $\|x\| = 1$. La ortogonalidad de los rangos de $E(\omega_\ell)$ dos a dos dice que $E(\omega_\ell)x = 0$ para $\ell \neq k$ y luego

$$\Psi(f)x = \alpha_k E(\omega_k)x = \alpha_k x.$$

Obtenemos $\|\Psi(f)\| \geq |\alpha_k| = \|f\|_\infty$. Junto con (3.29) eso implica que

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty. \tag{3.30}$$

Trataremos es caso general. Sea $f \in L^\infty(E)$. Existe una sucesión de funciones simples medibles f_n en Ω que converge a f respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por (3.30) la sucesión correspondiente de operadores $\Psi(f_n)$ forma una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(H)$. Ella converge en $\mathcal{B}(H)$ a un operador que llamaremos $\Psi(f)$. Esta definición no depende de la sucesión (f_n) porque dos sucesiones con estas propiedades pueden ser unidas alternando los elementos, y resulta otra sucesión con las mismas propiedades. Obviamente se tiene

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty \qquad \text{para todo } f \in L^\infty(E). \tag{3.31}$$

Fijemos $x, y \in H$. Si denotamos por $\|\cdot\|_{\infty,E_{x,y}}$ el supremo esencial respecto a la medida $E_{x,y}$, entonces el Lema 3.25 dice que $f_n \to f$ en $L^\infty(E_{x,y})$. Como $E_{x,y}$ es una medida compleja, es decir, con variación total finita, eso implica que $f_n \to f$ en $L^1(E_{x,y})$. En seguida, la representación integral (3.20) se sigue de (3.27) (reemplazando f por f_n).

La continuidad de la involución en $\mathcal{B}(H)$ y (3.24) implican que

$$\Psi(f)^* = \Psi(\bar{f}). \tag{3.32}$$

Si $f, g \in L^\infty(E)$ y si (f_n) y (g_n) son sucesiones de funciones simples medibles aproximando f y g en $L^\infty(E)$, entonces (3.25) y (3.26) también se cumplen en esta situación por la continuidad de las operaciones en $\mathcal{B}(H)$. Resumando, hemos demostrado que Ψ es un *-monomorfismo isométrico de $L^\infty(E)$ en $\mathcal{B}(H)$. Un argumento conocido implica que el rango A de Ψ es cerrado.

La definición de A implica que A es una subálgebra normal. Como Ψ es un isomorfismo, $\sigma_A(\Psi(f)) = \sigma([f]) = \mathcal{R}_{\text{ess}}(f)$. Basta recordar que el Teorema 2.33 dice que $\sigma_A(\Psi(f)) = \sigma(\Psi(f))$.

Sea $Q \in \mathcal{B}(H)$ tal que Q conmuta con todo $E(\omega)$. Por (3.23) Q conmuta con $\Psi(f)$ si f es una función simple medible. El mismo argumento de aproximación como antes implica que Q conmuta con $\Psi(f)$ para todo $f \in L^\infty(E)$. Inversamente, si Q conmuta todo $\Psi(f)$, particularmente conmuta con $\Psi(\chi_\omega) = E(\omega)$ si $\omega \in \mathcal{M}$. □

3.5. El teorema espectral

Para operadores $T \in \mathcal{B}(H)$ el espectro $\sigma(T)$ siempre se refiere al espectro en $\mathcal{B}(H)$.

3.27 Lema. *Sea A una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(H)$ que contiene I, tal que $T^* \in A$ si $T \in A$. Entonces $\sigma_A(T) = \sigma(T)$ para todo $T \in A$.*

Demostración. Sea $T \in A$ invertible en $\mathcal{B}(H)$. Basta demostrar que $T^{-1} \in A$. Sea eso el caso. Entonces TT^* es autoadjunto. Como $\mathcal{B}(H)$ es un B^*-álgebra, el Teorema 2.32(a) implica que $\sigma(TT^*) \subseteq \mathbb{R}$, y luego el Corolario 1.17 dice que $\sigma_A(TT^*) = \sigma(TT^*)$. Como TT^* es invertible en $\mathcal{B}(H)$, $0 \notin \sigma(TT^*)$, es decir, TT^* también es invertible en A. Se sigue que $T^{-1} = T^*(TT^*)^{-1} \in A$. □

3.28 Teorema. *Sea A una subálgebra cerrada normal de $\mathcal{B}(H)$ que contiene I, y sea Δ su espacio de ideales maximales. Entonces se cumplen:*

(a) *Existe una y sólo una resolución de la identidad en los conjuntos de Borel de Δ que satisface*

$$T = \int_\Delta \widehat{T} \, \mathrm{d}E \tag{3.33}$$

para todo $T \in A$, donde $\widehat{T}$ es la transformada de Gelfand de T.

(b) *La inversa de la transformada de Gelfand extiende a un *-isomorfismo isométrico Φ del álgebra $L^\infty(E)$ a una subálgebra cerrada B de $\mathcal{B}(H)$ que contiene A. Este mapeo está dado por*

$$\Phi(f) = \int_\Delta f \, \mathrm{d}E \qquad \textit{para todo } f \in L^\infty(E). \tag{3.34}$$

(c) *B está contenida en el subespacio lineal cerrado de $\mathcal{B}(H)$ generado por las proyecciones $E(\omega)$.*

(d) *Si $\omega \subseteq \Delta$ es abierto y no vacío, entonces $E(\omega) \neq 0$.*

(e) *Un operador $S \in \mathcal{B}(H)$ conmuta con todo $T \in A$ si y sólo si S conmuta con todo $E(\omega)$.*

Demostración. Recordemos que (3.33) significa

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x, y \in H,\ T \in A. \tag{3.35}$$

De acuerdo, A es una B^*-álgebra conmutativa. En seguida, la transformada de Gelfand es un *-isomorfismo isométrico de A y $C(\Delta)$, por el teorema de Gelfand y Naimark. Para x, y fijos el mapeo $\widehat{T} \mapsto \langle Tx, y\rangle$ es una función lineal acotada en $C(\Delta)$, porque $\|T\| = \|\widehat{T}\|_\infty$ y luego $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|\widehat{T}\|_\infty$. El teorema de representación de Riesz da una y sólo una medida regular $\mu_{x,y}$ en los conjuntos de Borel de Δ tal que se cumple

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y} \qquad \text{para todo } x, y \in H,\ T \in A. \tag{3.36}$$

La validez de (3.35) y la regularidad de $E_{x,y}$ implican la unicidad de la resolución de la identidad E, porque (3.35) determina E.

Por otro lado, sea $\mu_{x,y}$ dado por el teorema de representación de Riesz como antes, para todo $x, y \in H$. La identidad en (3.36) en sesquilineal en x, y para las funciones continuas $\widehat{T}$. Por aproximación el $L^1(\mu_{x,y})$, y usando que $\mu_{x,y}$ es finito, se sigue que la integral en la derecha de (3.36) es una función sesquilineal de x, y si $\widehat{T}$ está reemplazado por una función $f \in L^\infty(\Delta)$. El Teorema 3.10 dice que existe un y sólo un operador $\Phi(f) \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$\langle x, \Phi(f)^* y\rangle = \langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{x,y} \qquad \text{para todo } x, y \in H. \tag{3.37}$$

La unicidad y (3.36) implican que $\Phi(\widehat{T}) = T$ para todo $\widehat{T} \in C(\Delta)$. Entonces Φ es una extensión de la inversa de la transformación de Gelfand. Obviamente Φ es lineal, porque la integral en (3.37) es lineal en f.

Demostremos que Φ preserva involuciones. Sea $\widehat{T} \in C(\Delta)$ una función real. Entonces T es autoadjunto y se tiene

$$\int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{\int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{y,x}} = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\overline{\mu_{y,x}}.$$

Si $f, g \in C(\Delta)$ son reales, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Delta (f + \mathrm{i}g)\,\mathrm{d}\mu_{x,y} &= \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{x,y} + \mathrm{i}\int_\Delta g\,\mathrm{d}\mu_{x,y} \\ &= \int_\Delta f\,\mathrm{d}\overline{\mu_{y,x}} + \mathrm{i}\int_\Delta g\,\mathrm{d}\overline{\mu_{y,x}} = \int_\Delta (f + \mathrm{i}g)\,\mathrm{d}\overline{\mu_{y,x}}.\end{aligned}$$

La unicidad de $\mu_{x,y}$ implica que $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$. Para $f \in L^\infty(\Delta)$ eso da

$$\langle \Phi(\bar{f})x, y\rangle = \int_\Delta \bar{f}\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \overline{\int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{y,x}} = \overline{\langle \Phi(f)y, x\rangle} = \langle x, \Phi(f)y\rangle = \langle \Phi(f)^* x, y\rangle$$

para todo $x, y \in H$. En consecuencia,

$$\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^* \qquad \text{para todo } f \in L^\infty(\Delta). \tag{3.38}$$

Demostremos multiplicatividad de Φ. Si $S, T \in A$, entonces $\widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$ y

$$\int_\Delta \widehat{S}\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle STx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{S}\,\mathrm{d}\mu_{Tx,y}. \tag{3.39}$$

Como eso se cumple para todo $\widehat{S} \in C(\Delta)$, se tiene $\widehat{T}\mu_{x,y} = \mu_{Tx,y}$. Podemos reemplazar $\widehat{S}$ por cualquier función $f \in L^\infty(\Delta)$ en (3.39) y obtenemos

$$\int_\Delta f\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{Tx,y} = \langle \Phi(f)Tx, y\rangle = \langle Tx, \Phi(f)^* y\rangle \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,z}, \tag{3.40}$$

donde pusimos $z := \Phi(f)^* y$. Como eso vale para todo $\widehat{T} \in C(\Delta)$, se tiene $f\mu_{x,y} = \mu_{x,z}$. Eso nos deja reemplaza $\widehat{T}$ por $g \in L^\infty(\Delta)$ en (3.40) y obtenemos

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \int_\Delta fg\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \int_\Delta g\,\mathrm{d}\mu_{x,z} = \langle \Phi(g)x, z\rangle = \langle \Phi(g)x, \Phi(f)^* y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle$$

para todo $x, y \in H$. Eso comprueba la multiplicatividad de Φ, es decir,

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \qquad \text{para todo } f, g \in L^\infty(\Delta). \tag{3.41}$$

Lo anterior nos permite definir E como sigue: Para todo subconjunto de Borel ω de Δ definimos

$$E(\omega) := \Phi(\chi_\omega). \tag{3.42}$$

Como $\chi_{\omega_1 \cap \omega_2} = \chi_{\omega_1}\chi_{\omega_2}$, (3.41) implica

$$E(\omega_1 \cap \omega_2) = \Phi(\chi_{\omega_1 \cap \omega_2}) = \Phi(\chi_{\omega_1}\chi_{\omega_2}) = \Phi(\chi_{\omega_1})\Phi(\chi_{\omega_2}) = E(\omega_1)E(\omega_2).$$

Usando $\omega_1 = \omega_2$ en la última ecuación, se obtiene que cada $E(\omega)$ es una proyección. La formula (3.38) dice que $\Phi(f)$ es autoadjunto si f es real. Entonces todas $E(\omega)$ son autoadjuntas. Obviamente $E(\varnothing) = \Phi(0) = 0$. Como Φ es una extensión de la inversa de la transformada de Gelfand, (3.36) implica que

$$E(\Delta) = \Phi(1) = I.$$

La aditividad finita de E es una consecuencia de la linealidad de Φ: Si $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$, entonces $\chi_{\omega_1 \cup \omega_2} = \chi_{\omega_1} + \chi_{\omega_2}$ y luego

$$E(\omega_1 \cup \omega_2) = \Phi(\chi_{\omega_1 \cup \omega_2}) = \Phi(\chi_{\omega_1} + \chi_{\omega_2}) = \Phi(\chi_{\omega_1}) + \Phi(\chi_{\omega_2}) = E(\omega_1) + E(\omega_2).$$

Para todo $x, y \in H$ tenemos

$$E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y\rangle = \int_\Delta \chi_\omega \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\omega).$$

Eso implica (3.34). La ecuación (3.33) está implicada en (3.36). Finalmente, $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ es una consecuencia del Teorema 3.26. Hemos demostrado todo de los incisos (a) y (b).

El inciso (c) se sigue considerando aproximaciones de funciones en $L^\infty(E)$ por funciones simples.

Sea $\omega \subseteq \Delta$ abierto y no vacío. Por el lema de Urysohn existe $\widehat{T} \in C(\Delta)$ con soporte no vacío en ω. Sea $T \in A$ la imagen de $\widehat{T}$ bajo la inversa de la transformación de Gelfand. Como $\widehat{T} \neq 0$, también $T \neq 0$. Por lo tanto (3.34) dice que $E(\omega) \neq 0$. Eso demuestra el inciso (d).

Para demostrar (e) escogemos $S \in \mathcal{B}(H)$ y $x, y \in H$. Calculamos

$$\langle STx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{T} \, \mathrm{d}E_{x,S^*y} \tag{3.43}$$

$$\langle TSx, y\rangle = \int_\Delta \widehat{T} \, \mathrm{d}E_{Sx,y} \tag{3.44}$$

$$\langle SE(\omega)x, y\rangle = E_{x,S^*y}(\omega) \tag{3.45}$$

$$\langle E(\omega)Sx, y\rangle = E_{Sx,y}(\omega). \tag{3.46}$$

Si S y T conmutan para todo $T \in A$, entonces (3.43) y (3.44) demuestran que coinciden las medidas E_{x,S^*y} y $E_{Sx,y}$, ya que $\widehat{T}$ varia sobre todo $C(\Delta)$. Eso implica que equivalen (3.45) y (3.46), es decir, S conmuta con todas $E(\omega)$. La implicación inversa se demuestra similarmente. □

3.29 Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es normal, entonces existe una y sólo una resolución de la identidad E en los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$ que satisface*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda). \tag{3.47}$$

Además, toda proyección $E(\omega)$ conmuta con todo $S \in \mathcal{B}(H)$ que conmuta con T.

Demostración. Sea A la subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(H)$ generada por I, T y T^*. Como T es normal, A es normal y aplica el Teorema 3.28 a ese álgebra. Sea Δ el espacio de ideales maximales de A. En la demostración del Teorema 2.35 vimos que $\widehat{T}$ es un homeomorfismo entre Δ y $\sigma(T)$. $\widehat{T}$ genera por composición un *-isomorfismo isométrico entre $C(\sigma(T))$ y $C(\Delta)$ que manda $\mathrm{id}_{\sigma(T)}$ a $\widehat{T}$, véase el Lema 2.34. Entonces el Teorema 3.28 implica la existencia de E con (3.47).

Por otro lado, sea E una resolución de la identidad en los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$ que cumple (3.47). Para un polinomio complejo p en dos variables el Teorema 3.26 implica que

$$p(T, T^*) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \bar{\lambda}) \, \mathrm{d}E(\lambda),$$

es decir,

$$\langle p(T,T^*)x,y\rangle = \int_{\sigma(T)} p(\lambda,\bar{\lambda})\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda) \qquad \text{para todo } x,y\in H. \tag{3.48}$$

El conjunto de esos polinomios es denso en $C(\sigma(T))$ por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto, el mismo razonamiento como en la demostración del Teorema 3.28, utilizando el teorema de representación única de funciones lineales acotadas en $C(\sigma(T))$ de Riesz por medidas, dice que (3.48) determina la resolución de la identidad E.

Si S conmuta con T, entonces por el Teorema 3.19 S también conmuta con T^*, es decir, con todo A. El inciso (e) del Teorema 3.28 implica que S conmuta con todo $E(\omega)$. □

Resumando el contenido de los Teoremas 3.26, 3.28, and 3.29 podemos establecer un nuevo cálculo simbólico para operadores acotados normales y funciones acotadas:

3.30 Teorema (Cálculo simbólico para operadores normales acotados)**.** *Sea $T\in\mathcal{B}(H)$ normal y E la resolución de la identidad en los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$, dada en el Teorema* 3.29*. Para cualquier función de Borel acotada $\sigma(T)\to\mathbb{C}$ escribimos $f(T)$ para $\Phi(f)$, usando la definición en el inciso* (b) *del Teorema* 3.28 *(recordemos que identificamos f con su clase $[f]$ en $L^\infty(E)$). Entonces $f\mapsto f(T)\in\mathcal{B}(H)$ es un homomorfismo de funciones de Borel acotadas en $\sigma(T)$ que cumple:*

(a) $1\mapsto I$, $\mathrm{id}\mapsto T$,

(b) $\bar{f}(T)=f(T)^*$,

(c) $\|f(T)\|\le\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|$.

(d) $\|f(T)x\|^2=\int_{\sigma(T)}|f|^2\,\mathrm{d}E_{x,x}$.

(e) *Si $f\in C(\sigma(T))$ entonces hay igualdad en* (e) *y la restricción de este cálculo simbólico a $C(\sigma(T))$ coincide con la inversa de la transformación de Gelfand.*

(f) *Si $f_n\to f$ uniformemente, entonces $\|f_n(T)-f(T)\|\to 0$ en $\mathcal{B}(H)$.*

(g) *Si $S\in\mathcal{B}(H)$ conmuta con T entonces S conmuta con $f(T)$ para toda función acotada de Borel f.*

(h) *Como* id *puede ser aproximada uniformemente en $\sigma(T)$ por funciones de Borel simples, T es un límite de combinaciones lineales de proyecciones $E(\omega)$.*

(i) *Se cumple la aplicación espectral: $\sigma(f(T))=\mathcal{R}_{\mathrm{ess}}(f)$, donde $\mathcal{R}_{\mathrm{ess}}(f)$ está definido respecto a la resolución de la identidad E.*

El siguiente teorema es una aplicación de ese cálculo funcional:

3.31 Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es normal, entonces*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \mid x \in H,\ \|x\| \leq 1\}. \tag{3.49}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Basta demostrar que existe $x_0 \in H$ tal que $\|x_0\| = 1$ y

$$|\langle Tx_0, x_0\rangle| \geq \|T\| - \varepsilon. \tag{3.50}$$

Como en la demostración del Teorema 3.29 sea A la subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(H)$ generada por I, T y T^*, y sea Δ el espacio de los ideales maximales de A. Identifiquemos Δ con $\sigma(T)$ mediante el homeomorfismo $\widehat{T}$. Como $\|T\| = \|\widehat{T}\|_\infty = \rho(T)$ por los Teoremas 2.21 and 2.10, existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $\|T\| = |\lambda_0|$. Sea

$$\omega := \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}.$$

Si E es la descomposición espectral de T dada en el Teorema 3.29, entonces el Teorema 3.28(d) dice que $E(\omega) \neq 0$. En seguida, existe $x_0 \in \mathcal{R}(E(\omega))$ con $\|x_0\| = 1$.

Definimos $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ por $f(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)\chi_\omega$. Se sigue que

$$f(T) = (T - \lambda_0 I)\chi_\omega(T) = (T - \lambda_0 I)E(\omega)$$

y luego, usando que $E(\omega)x_0 = x_0$,

$$f(T)x_0 = Tx_0 - \lambda_0 x_0.$$

En consecuencia,,

$$|\lambda_0| - |\langle Tx_0, x_0\rangle| \leq |\langle Tx_0, x_0\rangle - \lambda_0| = |\langle f(T)x_0, x_0\rangle| \leq \|f(T)\| \leq \varepsilon,$$

porque $|f(\lambda)| \leq \varepsilon$ para $\lambda \in \sigma(T)$. Como $|\lambda_0| = \|T\|$, eso implica (3.50). $\square$

3.32 Ejemplo. La normalidad es necesaria en el teorema anterior. Un ejemplo para ver eso es el operador T en $\mathbb{C}^2$ representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respecto a la norma euclidiana en $\mathbb{C}^2$ se tiene que $\|T\| = 1$, pero $|\langle Tx, x\rangle| \leq 1/2$ si $\|x\| \leq 1$.

De acuerdo, el Teorema 2.35 implica que un operador normal $T \in \mathcal{B}(H)$ es autoadjunto si y sólo si $\sigma(T)$ es real.

3.33 Teorema. *Un operador normal $T \in \mathcal{B}(H)$ es unitario si y sólo si $\sigma(T)$ es un subconjunto del circulo unitario $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.*

Demostración. Si T es unitario, ya demostramos que $\sigma(T)$ está incluido en el circulo unitario el el Teorema 3.18. Inversamente, sea $\sigma(T)$ incluido en el circulo unitario. Se sigue que $\mathrm{id} \cdot \overline{\mathrm{id}} = |\mathrm{id}|^2 = 1$ en $\sigma(T)$. Entonces $TT^* = I$, es decir, T es unitario. $\square$

Sea $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ una subálgebra cerrada y normal que contiene I. Un subespacio M de H es *invariante bajo* A si $T(M) \subseteq M$ para todo $T \in A$. Por ejemplo, si $A = \{T\}$ entonces subespacios propios son invariantes. Si $\dim H < \infty$ entonces ya sabemos que H tiene una base ortonormal formada por eigenvectores, es decir, existen subespacios invariantes no triviales. Aquí, M no trivial significa que $M \neq \{0\}$ y $M \neq H$.

En general, sea Δ el espacio de los ideales maximales de A, y sea E la resolución de la identidad en Δ dada por el Teorema 3.28.

3.34 Teorema. *Existe un subespacio no trivial M de H que es invariante bajo A. Además, $M^\perp$ también es invariante bajo A.*

Demostración. Si Δ consiste de un solo punto, entonces $C(\Delta)$ tiene dimensión uno. Por el Teorema 2.21 A es isomorfo a $C(\Delta)$. Resulta que A consiste del espacio lineal generado por I y cualquier subespacio de H es invariante bajo A.

Si Δ consiste de más que un punto, escogemos dos subconjuntos ajenos abiertos no vacíos (usando la propiedad de Hausdorff de Δ). Si ω_1 es uno de ellos, pongamos $\omega_2 := \Delta \backslash \omega_1$. Entonces por el Teorema 3.28 tenemos $E(\omega_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$, $E(\omega_1) + E(\omega_2) = I$, y $\mathcal{R}(E(\omega_1)) \perp \mathcal{R}(E(\omega_2))$. Ponemos $M := \mathcal{R}(E(\omega_1))$. Como las proyecciones $E(\omega)$ conmutan entre si (Definición 3.20(c)), el Teorema 3.28(e) dice que $E(\omega_1)$ conmuta con T para todo $T \in A$. Si $T \in A$ y $x \in M$, entonces

$$Tx = TE(\omega_1)x = E(\omega_1)Tx,$$

es decir, $Tx \in M$. Eso demuestra que M es invariante bajo A. Lo mismo se cumple para $M^\perp = \mathcal{R}(E(\omega_2))$. □

3.6. Valores propios de operadores normales

3.35 Teorema. *Sea E la descomposición espectral de un operador normal $T \in \mathcal{B}(H)$. Si $f \in C(\sigma(T))$ y $\omega_0 := f^{-1}(0)$, entonces*

$$\mathcal{N}(f(T)) = \mathcal{R}(E(\omega_0)). \tag{3.51}$$

Demostración. La identidad $f\chi_{\omega_0} \equiv 0$ implica que $f(T)E(\omega_0) = 0$, es decir, $\mathcal{R}(E(\omega_0)) \subseteq \mathcal{N}(f(T))$. Para demostrar la inclusión inversa, definimos los conjuntos de Borel

$$\omega_1 := \{\lambda \in \sigma(T) \mid |f(\lambda)| > 1\}$$

y

$$\omega_n := \left\{\lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; \frac{1}{n} < |f(\lambda)| \leq \frac{1}{n-1}\right\} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Entonces $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una partición de $\sigma(T)$. Definimos $g_n := \chi_{\omega_n}/f$ para $n \in \mathbb{N}$. Todo g_n es una función de Borel acotada en $\sigma(T)$, y como $g_n f = \chi_{\omega_n}$, se tiene

$$g_n(T)f(T) = E(\omega_n) \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.52}$$

Sea $x \in \mathcal{N}(f(T))$. Entonces (3.52) implica que $E(\omega_n)x = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. La aditividad numerable de la medida vectorial $\omega \mapsto E(\omega)x$ (véase la Proposición 3.22) demuestra que $E(\sigma(T)\backslash\omega_0)x = 0$, es decir, $E(\omega_0)x = x$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{R}(E(\omega_0))$. Como $x \in H$ fue arbitrario, hemos demostrado que $\mathcal{N}(f(T)) \subseteq \mathcal{R}(E(\omega_0))$. $\square$

3.36 Teorema. *Sean E la descomposición espectral de un operador normal $T \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y $E_0 := E(\{\lambda_0\})$. Entonces*

(a) $\mathcal{N}(T - \lambda_0 I) = \mathcal{R}(E_0)$,

(b) *λ_0 es un valor propio de T si y sólo si $E_0 \neq 0$,*

(c) *todo punto aislado de $\sigma(T)$ es un valor propio de T.*

(d) *Si $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ es numerable, entonces todo $x \in H$ tiene una y sólo una expansión de la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{3.53}$$

donde $Tx_n = \lambda_n x_n$. Además, $x_m \perp x_n$ cuando $m \neq n$.

Los incisos (b) y (c) explican el nombre *espectro punto* para los eigenvalores de T.

Demostración. El inciso (a) es una consecuencia del Teorema 3.36, usando la función $f(\lambda) := \lambda - \lambda_0$. Obviamente, (b) se sigue de (a). Si λ_0 es aislado, entonces $\{\lambda_0\}$ es un subconjunto relativamente abierto en $\sigma(T)$ y $E_0 \neq 0$ por el Teorema 3.28(d). La conclusión es una consecuencia del inciso (b).

Para demostrar (d), pongamos $E_n := E(\{\lambda_n\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si λ_n es un punto de agregación de $\sigma(T)$, entonces E_n puede ser cero o no. De todos modos, las proyecciones E_n tienen rangos ortogonales dos a dos. La aditividad numerable de $\omega \mapsto E(\omega)x$ (véase la Proposición 3.22) demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n x = E(\sigma(T))x = x \qquad \text{para todo } x \in H.$$

Esta serie converge en norma. Con $x_n := E_n x$ obtenemos la representación (3.53). Observemos que $x_n = 0$ donde $E_n = 0$. Si $E_n \neq 0$ entonces $Tx_n = \lambda_n x_n$, por (b). La unicidad es una consecuencia de la ortogonalidad de los vectores x_n. $\square$

3.37 Repaso. Sean X, Y espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es *compacto* si $\overline{T(A)}$ es compacto en Y para todo subconjunto acotado $A \subseteq X$.

3.38 Teorema. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Entonces T es compacto si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(I) *$\sigma(T)$ tiene a lo más un punto de agregación. Ese sólo puede ser* 0.

(II) *Si $\lambda \neq 0$, entonces* $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$.

Demostración. La necesidad de (I) y (II) está conocida (véase por ejemplo Rudin, Functional Analysis, teoremas 4.18 y 4.25).

Supongamos (I) y (II). Primero trataremos el caso donde $\sigma(T)$ es infinito. Sea $\sigma(T)\backslash\{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Definimos $f_n \colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ por

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda_k, & \lambda = \lambda_k,\ k \leq n, \\ 0, & \lambda \in \sigma(T)\backslash\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}. \end{cases}$$

Pongamos $E_k := E(\{\lambda_k\})$. Entonces se sigue que

$$f_n(T) = \int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}E = \sum_{k=1}^{n} f_n(\lambda_k) E_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k.$$

Por el Teorema 3.36 se tiene $\mathcal{R}(E_k) = \mathcal{N}(T - \lambda_k I)$ y entonces $\dim \mathcal{R}(E_k) = \dim \mathcal{N}(T - \lambda_k I) < \infty$ por hipótesis. Eso implica que $f_n(T)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|\lambda - f_n(\lambda)| \leq |\lambda_{n+1}|$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$, el Teorema 3.30(c) implica que

$$\|T - f_n(T)\| \leq |\lambda_{n+1}| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to 0.$$

Como un límite de operadores compactos en $\mathcal{B}(H)$ es compacto, T es compacto.

Si $\sigma(T)$ es un conjunto finito, $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, entonces en la demostración arriba se obtiene $T = f_n(T)$ y T es compacto. □

3.39 Teorema. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ normal y compacto. Entonces se cumplen:*

(a) *T tiene un valor propio λ con $|\lambda| = \|T\|$.*

(b) *$f(T)$ es compacto si $f \in C(\sigma(T))$ y $f(0) = 0$.*

(c) *$f(T)$ no es compacto si $f \in C(\sigma(T))$, $f(0) \neq 0$ y $\dim H = \infty$.*

Demostración. Como T es normal, el Teorema 2.21 (Gelfand-Naimark) junto con el Teorema 2.35 implican que existe $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$. Si $\|T\| > 0$ ese λ es un punto aislado de $\sigma(T)$ por el Teorema 3.38, es decir, un valor propio por el Teorema 3.36. Eso demuestra (a) para este caso. Si $T = 0$, entonces la conclusión de (a) es obvia.

Para demostrar (b), escogemos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(\lambda)| < \varepsilon$ si $|\lambda| \leq \delta$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los puntos en $\sigma(T)\backslash\overline{B_\delta(0)}$. Para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sea Q_k un polinomio complejo en una variable tal que $Q_k(\lambda_\ell) = \delta_{k\ell}$ para todo $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos

$$P(\lambda) := \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^m Q_k(\lambda),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tan grande que $|P(\lambda)| < \varepsilon$ cuando $|\lambda| \leq \delta$ (obsérvese que $|\lambda/\lambda_k| < 1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ si $|\lambda| \leq \delta$). Como $m \geq 1$, el polinomio P tiene el monomio λ como factor. Por el cálculo simbólico, $P(T)$ tiene representación como producto de un operador acotado y T, es decir, $P(T)$ es compacto. Además, $P(\lambda_\ell) = f(\lambda_\ell)$ para todo $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esas propiedades implican que $|P(\lambda) - f(\lambda)| < 2\varepsilon$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$. En seguida, $\|P(T) - f(T)\| < 2\varepsilon$. Con ese resultado se puede construir una sucesión de operadores compactos que tiende a $f(T)$ en $\mathcal{B}(H)$, y $f(T)$ necesariamente es compacto.

En la demostración de (c) podemos suponer que $f(0) = 1$, sin pérdida de generalidad. Aplicando (b) a la función $1 - f$ obtenemos que $S := I - f(T)$ es compacto. Si $f(T)$ fuera compacto, $I = S + f(T)$ también sería compacto, en contradicción con $\dim E = \infty$. $\square$

3.7. Operadores positivos y raíces cuadradas

De acuerdo, un elemento x en un álgebra de Banach con involución es positivo, $x \geq 0$, si x es autoadjunto y si $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ satisface $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, entonces decimos que T es positivo, $T \geq 0$. El siguiente teorema demuestra que coinciden esas maneras de definir positividad.

3.40 Teorema. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces son equivalentes:*

(I) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$.

(II) $T = T^*$ *y* $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.

Demostración. Si (I) se cumple, entonces $\langle Tx, x\rangle$ es real y entonces

$$\langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle \qquad \text{para todo } x \in H.$$

El Teorema 3.8 implica que $T^* = T$, y el Teorema 2.35 dice que $\sigma(T)$ es real. Si $\lambda > 0$ demostremos que $-\lambda \notin \sigma(T)$. Por (I)

$$\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle \leq \langle (T + \lambda I)x, x\rangle \leq \|(T + \lambda I)x\| \, \|x\|,$$

es decir,

$$\|(T + \lambda I)x\| \geq \lambda\|x\| \qquad \text{para todo } x \in H.$$

El Teorema 3.15(c) implica que $(T + \lambda I)$ es invertible y $-\lambda \notin \sigma(T)$. Eso demuestra (II).

Si (II) se cumple y si E es la descomposición espectral de T, entonces

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E_{x,x}(\lambda).$$

Como $E_{x,x}$ es una medida positiva y $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, se tiene (I). $\square$

3.41 Teorema. *Todo operador positivo $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene una y sólo una raíz cuadrada positiva S en $\mathcal{B}(H)$. Si T es invertible, también S es invertible.*

Demostración. Sea A una subálgebra normal cerrada de $\mathcal{B}(H)$ que contiene A y I, y sea Δ es espacio de los ideales maximales de A. Recordemos que por el Teorema 2.33 $\sigma_A(T) = \sigma(T)$. Aplicando el Teorema 2.21 se tiene que $\widehat{T} \geq 0$ porque $\widehat{T}(\Delta) = \sigma(T) \subseteq [0, \infty)$. Sea S la imagen bajo la inversa de la transformación de Gelfand de la única función continua $\widehat{S}\colon \Delta \to [0, \infty)$ que cumple $\widehat{S}^2 = \widehat{T}$ y $\widehat{S} \geq 0$. Entonces S es la única raíz cuadrada positiva de T en A.

Sea A_0 la subálgebra más chica de ese tipo, y sea S_0 la raíz positiva de T en A_0. Si S es otra raíz positiva de T, sea A la subálgebra normal cerrada generada por I y S. Entonces $T = S^2 \in A$, es decir, $A_0 \subseteq A$. Lo anterior demuestra que $S = S_0$.

Finalmente, sea T invertible y S una raíz cuadrada de T. Se tiene $(T^{-1}S)S = T^{-1}T = I$ y, como S conmuta con $S^2 = T$ y luego con T^{-1}, $S(T^{-1}S) = T^{-1}S^2 = I$. Eso implica que S es invertible. ☐

3.42 Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces la raíz cuadrada positiva de T^*T es el único operador positivo $P \in \mathcal{B}(H)$ que cumple $\|Px\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$.*

Demostración. Primero notemos que

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in H. \tag{3.54}$$

Eso implica que $T^*T \geq 0$, algo que también podemos concluir de los Teoremas 2.32 and 3.40. Por otro lado, si $P \in \mathcal{B}(H)$ es autoadjunto, entonces

$$\langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \qquad \text{para todo } x \in H. \tag{3.55}$$

Considerando (3.54) y (3.55), el Teorema 3.8 implica que $\|Px\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$ si y sólo si $P^2 = T^*T$. ☐

Un número complejo λ siempre tiene la representación $\lambda = \alpha|\lambda|$, donde $|\alpha| = 1$. Eso motiva la siguiente

3.43 Definición. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ y si existen $P, U \in \mathcal{B}(H)$ tales que U es unitario, P positivo, y $T = UP$, entonces UP es una *descomposición polar* de T.

3.44 Nota. Si UP es una descomposición polar de T, entonces $T^*T = P^*U^*UP = P^2$. Además, $\|Tx\| = \|UPx\| = \|Px\|$ para todo $x \in H$. Por lo tanto, el Teorema 3.42 dice que P está determinado por T.

3.45 Teorema. (a) *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es invertible, entonces T tiene una y sólo una descomposición polar.*

(b) *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es normal, entonces T tiene una descomposición polar UP tal que U, P y T conmutan entre si.*

Demostración. **(a):** Si T es invertible, entonces también T^* y T^*T son invertibles. Por el Teorema 3.41 existe una y sólo una raíz cuadrada positiva $P \in \mathcal{B}(H)$ de T^*T, y P es invertible. Definimos $U := TP^{-1}$. Obtenemos que U es invertible y que

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

es decir, U es unitario. Como P es invertible, TP^{-1} es la única opción para escoger U.

(b): Sean p, u funciones definidas en $\sigma(T)$ por $p(\lambda) := |\lambda|$ y $u(\lambda) := \lambda/|\lambda|$ si $\lambda \neq 0$ y $u(0) := 1$. Entonces $p \geq 0$, $|u| = 1$ y $up = \mathrm{id}_{\sigma(T)}$. Como u y p son funciones de Borel acotadas, aplica el cálculo simbólico del Teorema 3.30. Con las definiciones $P := p(T)$ y $U := u(T)$ se sigue que UP es una descomposición polar de T. □

3.46 Nota. En el inciso (a) del Teorema 3.45 puede pasar que ningún par de operadores de U, P y T conmutan. No todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene una descomposición polar.

3.47 Definición. Sean $M, N, T, U \in \mathcal{B}(H)$, T invertible y U unitario. Si $M = TNT^{-1}$ entonces M y N son *similares*. Si $M = UNU^{-1}$ entonces M y N son *equivalentes unitariamente*.

3.48 Teorema. *Sean $M, N \in \mathcal{B}(H)$ normales y similares. Entonces M y N son equivalentes unitariamente. Particularmente, si $M = TNT^{-1}$ y si $T = UP$ es la descomposición polar de T, entonces $M = UNU^{-1}$.*

Demostración. Sea $M = TNT^{-1}$, y sea $T = UP$ la descomposición polar de T. Entonces $MT = TN$ y luego $M^*T = TN^*$, por el Teorema 3.19. En consecuencia,

$$T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*$$

y por lo tanto

$$NP^2 = NT^*T = T^*MT = T^*TN = P^2N.$$

El Teorema 3.30 implica que N conmuta con $f(P^2)$ para toda función de Borel acotada en $\sigma(P^2)$. Como $P \geq 0$, también $P^2 \geq 0$. La función $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$ aplicada en esta situación da que N conmuta con $f(P^2) = P$. Entonces $M = TNT^{-1}$ implica

$$M = (UP)N(UP)^{-1} = UPNP^{-1}U^{-1} = UNU^{-1}.$$

□

3.8. El grupo de los operadores invertibles

Recordemos que el grupo $G(A)$ de los elementos invertibles de un álgebra de Banach A tiene la componente conexa G_1 de la unidad, y que G_1 es el subgrupo generado por $\exp(A)$.

3.49 Teorema. *El grupo G de los operadores invertibles en $\mathcal{B}(H)$ es conexo, y todo elemento de G es el producto de dos exponenciales.*

Demostración. Sea $T \in G$ y $T = UP$ la descomposición polar dada en el Teorema 3.45(a). Entonces U es unitario y P positivo, es decir, ambos operadores son normales. Sea $\log\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo, y sea $\arg := \operatorname{Im}\log$. Consideramos la extensión Arg de arg a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definida en la siguiente manera: Si $\lambda \in (-\infty, 0)$, entonces ponemos $\operatorname{Arg}(\lambda) := \pi$. Se sigue que $\operatorname{Arg}(\lambda) = \lim_{s\to 0+} \arg(\lambda + \mathrm{i}s)$. Como $\lim_{s\to 0} \arg(\lambda - \mathrm{i}s) = -\pi$, Arg es semicontinua por arriba. Entonces $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es una función de Borel, y lo mismo se cumple para $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ dado por $\operatorname{Log}(\lambda) := \log|\lambda| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(\lambda)$. La función Log es una extensión no continua de la rama principal del logaritmo a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Como U y P son invertibles, $\sigma(U)$ y $\sigma(P)$ son subconjuntos de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Obviamente Log es acotado en $\sigma(U)$ y $\sigma(P)$ porque esos conjuntos tienen distancia positiva a 0 y son compactos (obsérvese que Log es continuo en $\sigma(P) \subseteq (0, \infty)$ y $\operatorname{Log} \equiv \mathrm{i}\operatorname{Arg}$ en $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$). Apliquemos el cálculo funcional para funciones de Borel definidas en el espectro de un operador y definimos $Q := \operatorname{Log}(U)$ y $S := \operatorname{Log}(P)$. Entonces ♣♣♣

$$T = UP = \mathrm{e}^{Q}\mathrm{e}^{S}.$$

La función $\exp\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ es continua, véase la Nota 1.27(e). Entonces para T, Q y S como antes el mapeo $[0, 1] \to \mathcal{B}(H)$, dado por

$$t \mapsto \exp(tQ)\exp(tS),$$

es un camino de I a T en G. En consecuencia, todo $T \in G$ está en la componente de I, es decir, G es conexo. $\square$

Vimos en la Nota 1.37 que un operador acotado invertible en un espacio de Hilbert de dimensión finita siempre es una exponencial, no sólo un producto de dos exponenciales. El siguiente ejemplo demuestra que en general eso no es cierto en espacios de dimensión infinita.

3.50 Teorema. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto, acotado, tal que*

$$\Omega := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha^2 \in D\}$$

es conexo, y tal que $0 \notin \overline{D}$. Sea $H(D)$ el espacio de las funciones holomorfas en D, y sea $H := H(D) \cap L^2(D)$. Entonces H es un subespacio cerrado de $L^2(D)$, es decir, es un espacio de Hilbert respecto al producto escalar inducido por $L^2(D)$. Sea M el operador lineal en H dado por

$$(Mf)(z) := zf(z) \qquad \textit{para todo } f \in H,\ z \in D.$$

M es la multiplicación con id. *Entonces $M \in \mathcal{B}(H)$, M es invertible pero no tiene raíz cuadrada en $\mathcal{B}(H)$.*

Demostración. Primero demostremos que H es cerrado en $L^2(D)$. Sean $f \in H$ y $K \subseteq D$ compacto. Ponemos $\delta := \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\setminus D) > 0$. Para $z \in K$ y $r \in (0, \delta)$ se sigue que $B_r(z) \subseteq D$. Sea $\gamma(t) := z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, es decir, γ es una parametrización de $\partial B_r(z)$. Entonces la formula de Cauchy implica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$

Una integración respecto a r da

$$f(z) = \frac{2}{\delta^2} \int_0^\delta f(z) r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{B_r(z)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|f(z)| \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{B_r(z)} |f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{\pi\delta^2} \|f\|_{L^2(B_r(z))} \sqrt{|B_\delta(z)|} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\delta} \|f\|_{L^2(D)} \tag{3.56}$$

para todo $z \in K$. Si $(f_n) \in H$ converge en $L^2(D)$, la desigualdad (3.56) implica que f_n converge uniformemente en subconjuntos compactos de D. Como límites localmente uniformes de funciones holomorfas son holomorfos, el límite de (f_n) también es holomorfo, es decir, un elemento de H.

Como D es acotado, existe $R > 0$ tal que $D \subseteq B_R(0)$. Entonces

$$\|Mf\|_H^2 = \int_D |zf(z)|^2\,\mathrm{d}z \le R^2 \|f\|_H^2,$$

es decir, $M \in \mathcal{B}(H)$. Similarmente, como $1/z$ es una función acotada, el operador N de multiplicación por $1/z$ está en $\mathcal{B}(H)$. Obviamente $MN = NM = I$ y luego M es invertible en $\mathcal{B}(H)$.

Por contradicción supongamos que existe $Q \in \mathcal{B}(H)$ tal que $Q^2 = M$. Fijemos cualquier $\alpha \in \Omega$. Entonces $\lambda := \alpha^2 \in D$. Definimos

$$M_\lambda := M - \lambda I, \qquad S := Q - \alpha I, \qquad T := Q + \alpha I.$$

En seguida,

$$ST = M_\lambda = TS. \tag{3.57}$$

Si $M_\lambda f = 0$ para un $f \in H$, entonces $(z - \lambda) f(z) = 0$ para $z \in D$ y $f \equiv 0$ en $D\setminus\{\lambda\}$. Por la holomorfía, $f = 0$. Eso demuestra que $\mathcal{N}(M_\lambda) = \{0\}$. Sea $f \in \mathcal{R}(M_\lambda)$. Entonces $f(\lambda) = 0$. Inversamente, sea $f \in H$ tal que $f(\lambda) = 0$. Por la holomorfía, existe una función $g \in H$ tal que $f(z) = (z - \lambda) g(z)$ para todo $z \in H$, es decir, $f \in \mathcal{R}(M_\lambda)$. En otras palabras,

$$\mathcal{R}(M_\lambda) = \{f \in H \mid f(z) = \lambda\}. \tag{3.58}$$

La desigualdad (3.56) implica que evaluación en un punto de D es una función lineal acotada en H. En seguida, $\mathcal{R}(M_\lambda)$ es un subespacio cerrado de H de codimensión 1.

Como M_λ es inyectivo, (3.57) demuestra que S y T son inyectivos. Como $\mathcal{R}(M_\lambda) \neq H$, M_λ no es invertible. Eso implica que uno de S y T no es invertible. Supongamos que S no es invertible. Como $M_\lambda = ST$, $\mathcal{R}(M_\lambda) \subseteq \mathcal{R}(S)$. Por otro lado $\mathcal{R}(S) \neq H$ por el teorema de la inversa continua (o aplicación abierta). Se sigue que $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(M_\lambda)$ porque $\operatorname{codim} \mathcal{R}(M_\lambda) = 1$ y que S es una biyección de H con $\mathcal{R}(M_\lambda)$. Otra vez por la identidad $M_\lambda = ST$ obtenemos que S también es una biyección de $\mathcal{R}(T)$ con $\mathcal{R}(M_\lambda)$. En consecuencia, $\mathcal{R}(T) = H$ y T es invertible en $\mathcal{B}(H)$ por el teorema de la inversa continua. Se demuestra similarmente que S es invertible en $\mathcal{B}(H)$ si T no es invertible.

Por la definición de S y T lo anterior implica que precisamente uno de α y $-\alpha$ está en $\sigma(Q)$, si $\alpha \in \Omega$. Por lo tanto Ω es la unión de los conjuntos ajenos $\sigma(Q) \cap \Omega$ y $-\sigma(Q) \cap \Omega$, que son relativamente cerrados en Ω y tienen la misma cardinalidad. Eso contradice la conexidad de Ω y comprueba que no existe una raíz cuadrada Q de M. □

3.51 Nota. Una clase de ejemplos para conjuntos D que cumplen las hipótesis del Teorema 3.50 son anillos circulares con centro 0.

Como M en el Teorema 3.50 no tiene una raíz cuadrada, y como todos exponenciales tienen raíces cuadradas, M no es un exponencial.

3.9. Una caracterización de B^*-álgebras

3.52 Lema. *Sea X un espacio normado de funciones acotadas definidas sobre un conjunto, con la norma del supremo, y sea L una función lineal en X tal que*

$$\|L\| = L(1) = 1. \tag{3.59}$$

Entonces $f \in X$ y $0 \leq f \leq 1$ implica $0 \leq Lf \leq 1$.

Demostración. Escogemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $Lf = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$L\left(f - \frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) = \alpha - \frac{1}{2} + \mathrm{i}(\beta + t).$$

Como f es real y $\|f - 1/2\| \leq 1/2$, se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta + t)^2 &= \left|\alpha - \frac{1}{2} + \mathrm{i}(\beta + t)\right|^2 \\ &\leq \|L\|^2 \left\|f - \frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right\|^2 \leq \left\|f - \frac{1}{2}\right\|^2 + \|t\|^2 \leq \frac{1}{4} + t^2.\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\alpha^2 - \alpha + \beta^2 + 2\beta t \leq 0 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Eso implica que $\beta = 0$ y entonces $\alpha^2 \leq \alpha$, es decir, $0 \leq \alpha \leq 1$. □

3.53 Teorema. *Si A es una B^*-álgebra y si $z \in A$, entonces existe una función lineal positiva F en A tal que*

$$F(e) = 1 \qquad y \qquad F(zz^*) = \|z\|^2. \tag{3.60}$$

Demostración. Sea $x_0 := zz^*$. Por el Teorema 2.32(e) $\sigma(x_0) \subseteq [0, \infty)$. Sea Δ_0 es espacio de ideales maximales de la subálgebra cerrada A_0 de A generada por e y x_0. Entonces A_0 es normal porque x_0 es autoadjunto. El teorema de Gelfand-Naimark, Teorema 2.21, implica que $\widehat{A}_0 = C(\Delta_0)$, y por el cálculo simbólico del Teorema 2.35 $\hat{x}_0 \geq 0$ es una función continua en Δ_0 que alcanza su máximo en un $h \in \Delta_0$. Se tiene

$$\hat{x}_0(h) = \|\hat{x}_0\|_\infty = \|x_0\| = \|z\|^2.$$

Definimos una función lineal f en A_0 por $f(x) := \hat{x}(h)$. Entonces

$$f(e) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(zz^*) = \|z\|^2, \tag{3.61}$$

y $\|f\| = 1$ porque $|f(x)| \leq \|x\|_\infty = \|x\|$ para todo $x \in A_0$.

Con el teorema de Hahn-Banach extendemos f a una función lineal en A que tiene $\|F\| = 1$. Tenemos que demostrar que $F(yy^*) \geq 0$ para todo $y \in A$.

Fijamos $y \in A$ y sea Δ_1 el espacio de los ideales maximales de la subálgebra cerrada A_1 de A generada por e y yy^*. Como antes, A_1 es normal y $\widehat{A}_1 = C(\Delta_1)$. Definimos una función lineal ϕ en $C(\Delta_1)$ por

$$\phi(\hat{x}) := F(x).$$

Entonces $\phi(1) = F(e) = f(e) = 1$, $|\phi(\hat{x})| \leq \|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$, es decir, $\|\phi\| = 1$. El Lema 3.52 implica que $\phi(\hat{x}) \geq 0$ para todo $x \in A$ que cumplen $\hat{x} \geq 0$ en Δ_1. Si $x_1 := yy^*$, entonces se sigue como al inicio de la demostración que $\hat{x}_1 \geq 0$ en Δ_1. Eso demuestra $F(yy^*) = F(x_1) = \phi(\hat{x}_1) \geq 0$, lo que necesitamos que demostrar. □

3.54 Definición. Sean X, Y espacios métricos, y sea $f\colon X \to Y$ un mapeo. Si $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$ entonces f es un mapeo *isométrico.*

3.55 Nota. Es obvio que un mapeo isométrico es un homeomorfismo entre su dominio y su rango.

3.56 Teorema. (a) *Sea X un espacio métrico no vacío. Entonces existe un espacio métrico completo Y (la* completación de X*) tal que $X \subseteq Y$ es denso. Y está determinado únicamente respecto a homeomorfismos isométricos.*

(b) *Si X es un espacio normado (real o complejo), entonces Y del inciso* (a) *es un espacio de Banach. Y está determinado únicamente respecto a isomorfismos isométricos. Si X_1, X_2 son espacios normados, si Y_1 y Y_2 son las completaciones de X_1 y X_2, y si $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, entonces existe una y sólo una extensión $B \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ de A. Ese operador cumple $\|B\| = \|A\|$.*

(c) *Si X es un espacio con producto escalar, entonces Y es un espacio de Hilbert.*

Demostración. **(a):** Sea $Z := C_{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}}(X)$ el espacio de Banach real de las funciones continuas y acotadas $X \to \mathbb{R}$. Sea $a \in X$ fijo. Para $x \in X$ definimos una aplicación $T(x)\colon X \to \mathbb{R}$

$$T(x)(y) := d(x,y) - d(a,y).$$

La desigualdad del cuadrangulo implica que

$$|T(x)(y)| \leq d(x,a) + d(y,y) = d(x,a),$$

es decir, $T(x)$ es acotado en X. Similarmente se tiene

$$|T(x)(y_1) - T(x)(y_2)| \leq |d(x,y_1) - d(x,y_2)| + |d(a,y_1) - d(a,y_2)| \leq 2d(y_1,y_2)$$

para todo $y_1, y_2 \in X$, es decir, $T(x) \in Z$ para todo $x \in X$. Además,

$$|T(x_1)(y) - T(x_2)(y)| = |d(x_1,y) - d(x_2,y)| \leq d(x_1,x_2)$$

y $|T(x_1)(x_1) - T(x_2)(x_1)| = d(x_1,x_2)$, es decir, $\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty = d(x_1,x_2)$. Entonces el mapeo $T\colon X \to Z$ es isométrico y nos permite identificar X con $T(X) \subseteq Z$. Luego se define $Y := \overline{X}$, donde el cierre se toma en Z. Como Z es un espacio real de Banach, Y es un espacio métrico completo. Por su definición, Y tiene X como subconjunto denso.

Sea d la métrica en Y, que también induce la métrica de X. Sea $(\widetilde{Y}, \tilde{d})$ otra completación de X. Para $x \in Y$ existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \to x$ en Y. (x_n) es una sucesión de Cauchy en X que converge a un $\tilde{x}$ en $\widetilde{Y}$. Ese mapeo $x \mapsto \tilde{x}$ no depende de la selección de (x_n): Si (x_n') es otra sucesión en X que converge a x en Y, entonces la unión de (x_n) y (x_n') es una sucesión de Cauchy que converge al mismo $\tilde{x}$. Es fácil ver que el mapeo $x \mapsto \tilde{x}$ es suprayectivo, y su restricción a X es la identidad. Sean $x, y \in Y$ y sean $(x_n), (y_n) \subseteq X$ sucesiones que convergen a x y y en Y, respectivamente. Entonces

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$$

y $x \to \tilde{x}$ es una isometría suprayectiva. En otras palabras, Y y $\widetilde{Y}$ son homeomorfos isométricamente.

(b): Sean $\|\cdot\|_X$ la norma en X y d la métrica en Y. Como d induce la métrica en X, se tiene $d(x,y) = \|x - y\|_X$ para todo $x, y \in X$. Primero equipamos Y con una estructura lineal. Sean $x, y \in Y$ y sean $(x_n), (y_n) \subseteq X$ sucesiones que convergen a x y y, respectivamente. Entonces (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy en X, y también $(x_n + y_n)$ es una sucesión de Cauchy en X con un límite en Y. Es fácil ver que este límite no depende de las sucesiones. Por lo tanto podemos definir $x + y := \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. La continuidad de las operaciones en X asegura que esta adición coincide con la adición dada en X. Similarmente se define la multiplicación escalar en Y. La continuidad de la operaciones en X implica que con estas definiciones Y es un espacio vectorial.

Definimos la extensión de la norma $\|x\|_Y := d(x, 0)$ a Y. Claramente ella es consistente con la norma dada en X. La continuidad de la métrica d implica mediante argumentos ya conocidos que $\|\cdot\|_Y$ es una norma en Y que induce la métrica d.

Si $\widetilde{Y}$ es otra completación de E, entonces el homeomorfismo isométrico $Y \to \widetilde{Y}$ construido para demostrar el inciso (a) es lineal.

Sea $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Si $x \in Y_1$ y $(x_n) \subseteq X_1$ converge a x, entonces

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\|$$

demuestra que $(Ax_n) \subseteq X_2$ es una sucesión de Cauchy. Como Y_2 es completo, podemos definir $Bx := \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Es rutina verificar que B está bien definido y que B es una extensión lineal de A a Y_1. Se tiene por la continuidad de las normas que

$$\|Bx\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|A\| \, \|x\|,$$

es decir, $B \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ y $\|B\| \leq \|A\|$. Por otro lado, como B es una extensión de A, $\|B\| \geq \|A\|$.

(c): Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en X. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en Y, entonces

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \leq \|x_n - x_m\| \, \|y_n\| + \|x_m\| \, \|y_n - y_m\|,$$

es decir, podemos definir una extensión del producto escalar a Y por

$$\langle x, y \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle.$$

Se sigue fácilmente que ese producto escalar induce la norma en Y dada en el inciso (b). $\square$

3.57 Teorema. *Si A es una B^*-álgebra y si $u \in A \backslash \{0\}$, entonces existe un espacio de Hilbert H_u y un homomorfismo $T_u \colon A \to \mathcal{B}(H_u)$ que satisface $T_u(e) = I$,*

$$T_u(x^*) = T_u(x)^* \qquad \textit{para todo } x \in A, \tag{3.62}$$

$$\|T_u(x)\| \leq \|x\| \qquad \textit{para todo } x \in A, \tag{3.63}$$

y $\|T_u(u)\| = \|u\|$.

Demostración. Consideremos u fijo y omitamos el índice respectivo. Sea F una función lineal positiva en A que satisface

$$F(e) = 1 \qquad \text{y} \qquad F(u^*u) = \|u\|^2. \tag{3.64}$$

Tal función existe por el Teorema 3.53. Por el Teorema 2.38(e) F es continuo. Por la continuidad de las operaciones en A el conjunto

$$Y := \{y \in A \mid F(xy) = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$

es un subespacio cerrado de A (y un ideal por la izquierda). Denotemos las clases de A/Y en el sentido del cociente de espacios de Banach por

$$a' := [a] = a + Y.$$

Demostremos que

$$\langle a', b' \rangle := F(b^* a)$$

define un producto escalar en A/Y.

Primero demostremos que esa definición no depende de la selección de los representantes de a' y b'. Sean $a_1, a_2 \in a'$ y $b_1, b_2 \in b'$. Entonces

$$F(b_1^*(a_2 - a_1)) = 0$$

y, con el Teorema 2.38(a),

$$|F((b_2 - b_1)^* a_2)| = |F(a_2^*(b_2 - b_1))| = 0$$

porque $a_2 - a_1 \in Y$ y $b_2 - b_1 \in Y$. En seguida

$$\begin{aligned} F(b_2^* a_2) &= F((b_2 - b_1)^* a_2 + b_1^*(a_2 - a_1) + b_1^* a_1) \\ &= F((b_2 - b_1)^* a_2) + F(b_1^*(a_2 - a_1)) + F(b_1^* a_1) = F(b_1^* a_1). \end{aligned}$$

Eso demuestra que el producto escalar está bien definido. El inciso (a) del Teorema 2.38 demuestra que $\langle a', b' \rangle = \overline{\langle b', a' \rangle}$. Es obvio que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en el primer argumento. Además, $\langle a', a' \rangle = F(a^* a) \geq 0$ para todo $a' \in A/Y$ porque F es una función lineal positiva. Si $\langle a', a' \rangle = 0$, entonces $F(a^* a) = 0$ y

$$|F(xa)| \leq F(xx^*) F(a^* a) = 0 \qquad \text{para todo } x \in A,$$

es decir, $a \in Y$ y $a' = 0$. Con estas propiedades queda demostrado que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en A/Y.

Podemos considerar A/Y como un espacio vectorial con la norma $\|a'\| := \sqrt{\langle a', a' \rangle}$. Nótese que esa norma no coincide con la norma usual del cociente; en seguida, no sabemos si A/Y es completo. Sea H la completación de A/Y respecto a $\| \cdot \|$. Eso implica que H es un espacio de Hilbert que contiene A/Y como subespacio denso. Este es el espacio de Hilbert que estábamos buscando.

Para $x \in A$ definimos un mapeo $T(x) := A/Y \to A/Y$ por

$$T(x) a' := (xa)'.$$

Si $a_1, a_2 \in a'$, entonces $xa_1 - xa_2 = x(a_1 - a_2) \in Y$, es decir, $(xa_1)' = (xa_2)'$. Por lo tanto, $T(x)$ está bien definido. Es claro que T es un homomorfismo de álgebras entre A y el álgebra de los operadores lineales en A/Y, y que $T(e) = I$.

Demostremos la desigualdad

$$\|T(x)\| \le \|x\| \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{3.65}$$

Notemos que

$$\|T(x)a'\|^2 = \langle (xa)', (xa)' \rangle = F(a^* x^* xa). \tag{3.66}$$

Para $a \in A$ fijo, definimos $G(x) := F(a^* xa)$. Como $G(x^* x) = F(a^* x^* xa) = F((xa)^* xa) \ge 0$, G es una función lineal positiva. El Teorema 2.38(d) implica que

$$G(x^* x) \le G(e)\|x\|^2.$$

Por (3.66) se tiene

$$\|T(x)a'\|^2 = G(x^* x) \le F(a^* a)\|x\|^2 = \|a'\|^2 \|x\|^2,$$

es decir, (3.65).

Usando (3.65) y el Teorema 3.56(b) extendemos $T(x)$ a H y obtenemos $T(x) \in \mathcal{B}(H)$. Por continuidad de $T(x)$ y densidad de A/Y en H esa extensión también es un homomorfismo de álgebras, ahora entre A y $\mathcal{B}(H)$.

La computación

$$\begin{aligned}\langle T(x^*)a', b' \rangle = \langle (x^* a)', b' \rangle = F(b^* x^* a) = F((xb)^* a)\\ = \langle a', (xb)' \rangle = \langle a', T(x)b' \rangle = \langle T(x)^* a', b' \rangle\end{aligned}$$

para $a', b' \in A/Y$ demuestra que $T(x^*)a' = T(x)^* a'$ para todo $a' \in A/Y$. Por densidad y continuidad, eso implica que $T(x^*) = T(x)^*$ en $\mathcal{B}(H)$. Además, (3.64) y (3.66) implican que

$$\|u\|^2 = F(u^* u) = \langle u', u' \rangle = \|u'\|^2 = \|T(u)e'\|^2 \le \|T(u)\|^2 \|e'\|^2 = \|T(u)\|^2$$

porque $\|e'\|^2 = F(e^* e) = F(e) = 1$. Junto con (3.65) eso implica $\|T(u)\| = \|u\|$ y termina la demostración. □

3.58 Teorema. *Si A es una B^*-álgebra, entonces existe un *-isomorfismo isométrico de A con una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert adecuado.*

Demostración. Para $u \in A$ sea H_u el espacio de Hilbert dado en el Teorema 3.57 y sea $T_u \colon A \to H_u$ el homomorfismo respectivo. Sea

$$X := \prod_{u \in A} H_u$$

el producto cartesiano de los H_u con las proyecciones coordenadas $\pi_u \colon X \to H_u$ respectivas. X tiene estructura lineal inducida por las estructuras lineales en las coordenadas. Eso implica que π_u es lineal para todo $u \in A$.

Definimos

$$H := \left\{ v \in X \;\middle|\; \sum_{u\in A} \|\pi_u(v)\|^2 < \infty \right\} \tag{3.67}$$

donde las normas son las de H_u. La convergencia de la serie en (3.67) implica que sólo un conjunto numerable de coordenadas $\pi_u(v)$ no es cero. Es fácil verificar que H es un subespacio lineal de X. Usemos la notación

$$\langle v_1, v_2\rangle := \sum_{u\in A} \langle \pi_u(v_1), \pi_u(v_2)\rangle,$$

cuya convergencia se sigue de la desigualdad de Cauchy en H_u y de la desigualdad de Hölder para sumas.

Es trivial verificar que ella define un producto escalar en H. La norma respectiva cumple

$$\|v\|^2 = \sum_{u\in A} \|\pi_u(v)\|^2. \tag{3.68}$$

Demostremos que H es un espacio de Hilbert. Sea $(x_n) \subseteq H$ una sucesión de Cauchy. Obviamente $(\pi_u(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en H_u para todo $u \in A$, y tiene un límite. Denotemos por $x \in X$ el elemento que cumple $\pi_u(x) = \lim_{n\to\infty} \pi_u(x_n)$ para todo $u \in A$. Falta demostrar que $x \in H$ y que $x_n \to x$ en H. Sea $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $\|x_n - x_m\| \le \varepsilon$ para todo $m, n \ge n_0$. Si $m \ge n_0$, entonces el Lema de Fatou, respecto a la medida de conteo en A, implica

$$\begin{aligned}
\sum_u \|\pi_u(x - x_m)\|^2 &= \sum_u \|\pi_u(x) - \pi_u(x_m)\|^2 \\
&= \sum_u \lim_{n\to\infty} \|\pi_u(x_n) - \pi_u(x_m)\|^2 \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \sum_u \|\pi_u(x_n) - \pi_u(x_m)\|^2 \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_m\|^2 \\
&\le \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Eso demuestra que $x - x_m \in H$ y entonces, como $x_m \in H$ que $x \in H$. Además, $\|x - x_m\| \le \varepsilon$ para todo $m \ge n_0$. Eso implica que $x_n \to x$ en H cuando $n \to \infty$.

Si $S_u \in \mathcal{B}(H_u)$ para todo $u \in A$ y si $M := \sup_{u\in A} \|S_u\| < \infty$, entonces definimos para $v \in H$ el elemento Sv dando sus coordenadas $\pi_u(Sv) := S_u \pi_u(v)$. Se tiene que $S\colon H \to X$ es lineal y

$$\|Sv\|^2 = \sum_u \|S_u \pi_u(v)\|^2 \le M^2 \|v\|^2,$$

es decir , $Sv \in H$, $S \in \mathcal{B}(H)$ y $\|S\| \le M$. Por otro lado, existen para $\varepsilon > 0$ un $u \in A$ y $v_u \in H_u$ tales que $\|v_u\| = 1$ y $\|S_u v_u\| \ge M - \varepsilon$. Sea $v \in H$ el elemento con $\pi_{u'}(v) = \delta_{uu'} v_u$

para $u' \in A$. Entonces $\|v\| = 1$ y $\|Sv\|^2 = \|S_u v_u\|^2 \geq (M - \varepsilon)^2$, es decir, $\|S\| \geq M - \varepsilon$. Dejando $\varepsilon \to 0$ se obtiene

$$\|S\| = \sup_u \|S_u\|. \tag{3.69}$$

Ahora definamos el *-homomorfismo isométrico $T\colon A \to \mathcal{B}(H)$. Sea $x \in A$. Para $v \in H$ definimos $T(x)v$ dando las coordenadas

$$\pi_u(T(x)v) := T_u(x)\pi_u(v).$$

Como

$$\|T_u(x)\| \leq \|x\| = \|T_x(x)\|,$$

(3.69) implica que $T(x) \in \mathcal{B}(H)$ y

$$\|T(x)\| = \sup_u \|T_u(x)\| = \|x\|.$$

Eso demuestra que T es isométrico. Que T es un *-homomorfismo es una consecuencia de su definición y de esa propiedad para T_u, aplicada en las coordenadas. $\square$

4. Operadores no acotados

4.1. Introducción

En esta sección sea H un espacio de Hilbert, como antes. Un *operador* es un mapeo lineal $\mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$, donde $\mathcal{D}(T), \mathcal{R}(T)$ son subespacios de H, el dominio y el rango de T. En general no supondremos que T sea acotado, respecto a la norma inducida en $\mathcal{D}(T)$. Si T es acotado entonces existe una extensión acotada a $\overline{\mathcal{D}(T)}$ y finalmente a todo H, porque uno puede definir una extensión al complemento ortogonal de $\overline{\mathcal{D}(T)}$ usando 0. En ese caso T es la restricción a $\mathcal{D}(T)$ de un elemento de $\mathcal{B}(H)$. Si $\mathcal{D}(T)$ es denso en H entonces T es *densamente definido*.

Definimos la *gráfica de T* por

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) \in H \times H \mid x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Si S es un operador tal que $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ y $Sx = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ entonces S es una extensión de T. Eso es el caso si y sólo si $\mathcal{G}(T) \subseteq \mathcal{G}(S)$, y usaremos la notación

$$T \subseteq S.$$

$T = S$ significa que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$ y que S y T coinciden en $\mathcal{D}(S)$.

Un *operador cerrado* es un operador en H cuya gráfica es un subespacio cerrado de $H \times H$, respecto a la norma $\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$. El teorema de la gráfica cerrada dice que $T \in \mathcal{B}(H)$ si y sólo si $\mathcal{D}(T) = H$ y T es cerrado.

Si T es densamente definido definamos el *operador adjunto* de T: Sea $\mathcal{D}(T^*)$ el conjunto de todos $y \in H$ tales que $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ es acotado en $\mathcal{D}(T)$. Esa función lineal puede ser extendida a todo H por continuidad y densidad. Por el teorema de representación de Riesz existe un elemento T^*y en H tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T). \tag{4.1}$$

La densidad de $\mathcal{D}(T)$ y (4.1) implican que T^*y es el único elemento que cumple con estas condiciones. Es trivial verificar que $\mathcal{D}(T^*)$ es un subespacio lineal de H y que T^* es un operador lineal. Además, esa definición coincide con la definición del operador adjunto para operadores acotados.

Operaciones algebraicas son mas complicadas con operadores no acotados que con operadores acotados, porque uno debe de respetar los dominios. Los dominios naturales para suma y producto de operadores son los siguientes:

$$\mathcal{D}(S + T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{D}(ST) := \{x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx \in \mathcal{D}(S)\}. \tag{4.3}$$

Entonces las leyes asociativas se cumplen:

$$(R+S)+T = R+(S+T), \tag{4.4}$$

$$(RS)T = R(ST). \tag{4.5}$$

También se cumple una ley distributiva

$$(R+S)T = RT+ST \tag{4.6}$$

pero la otra sólo en una forma débil

$$T(R+S) \supseteq TR+TS. \tag{4.7}$$

Multiplicación por un escalar está definida así: Si $\alpha = 0$ entonces $\mathcal{D}(\alpha T) = H$ y $\alpha T = 0$. Si $\alpha \neq 0$ entonces $\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T)$ y $(\alpha T)x = \alpha Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.

Un operador T es *cerrable* si existe un operador cerrado S tal que $T \subseteq S$.

4.1 Nota. Un subespacio X de $H \times H$ es la gráfica de un operador si y sólo si la restricción de $\pi_1 \colon H \times H \to H$ a X es inyectiva. Aquí π_1 es la proyección a la primera coordenada. Un operador es cerrable si y sólo si $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador. Si es el caso, entonces el operador S tal que $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(S)$ es cerrado y cumple $T \subseteq S$.

4.2 Teorema. *Sean S, T y ST operadores densamente definidos en H. Entonces*

$$T^*S^* \subseteq (ST)^*. \tag{4.8}$$

Si adicionalmente $S \in \mathcal{B}(H)$, entonces

$$T^*S^* = (ST)^*. \tag{4.9}$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{D}(ST)$ y $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. Entonces

$$\langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle \tag{4.10}$$

porque $x \in \mathcal{D}(T)$ y $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$. Similarmente,

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle \tag{4.11}$$

porque $Tx \in \mathcal{D}(S)$ y $y \in \mathcal{D}(S^*)$. En seguida,

$$\langle STx, y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle. \tag{4.12}$$

Eso implica que $x \mapsto \langle STx, y\rangle$ es un mapeo acotado en $\mathcal{D}(ST)$, es decir, $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$ y se cumple $\mathcal{D}(T^*S^*) \subseteq \mathcal{D}((ST)^*)$. Además, (4.12) implica que

$$\langle x, T^*S^*y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(ST),\ y \in \mathcal{D}(T^*S^*),$$

es decir, $[T^*S^*y - (ST)^*y] \in \mathcal{D}(ST)^\perp$. Como $\mathcal{D}(ST)$ es denso, eso implica que $T^*S^* = (ST)^*$ en $\mathcal{D}(T^*S^*)$, y se cumple (4.8).

Ahora sean $S \in \mathcal{B}(H)$ y $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$. Entonces $S^* \in \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{D}(S^*) = H$ y

$$\langle Tx, S^*y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle \tag{4.13}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(ST)$. Eso implica que $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$, es decir, $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$ y (4.9) se cumple. □

4.2. Gráficas y operadores simétricos

4.3 Definición. Un operador T en H es *simétrico* si

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \tag{4.14}$$

para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Si T está densamente definido entonces T es simétrico si y sólo si $T \subseteq T^*$. Si $T = T^*$ entonces T es *autoadjunto*.

4.4 Nota. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ entonces T es simétrico si y sólo si T es autoadjunto. Eso no es cierto en general para operadores no acotados densamente definidos.

Si T es densamente definido y si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y \in \mathcal{D}(S)$, entonces $S \subseteq T^*$.

Usaremos el siguiente producto escalar para analizar gráficas de operadores:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle := \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2 + y_2\rangle \qquad \text{si } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in H \times H. \tag{4.15}$$

Definimos el operador unitario $V\colon H \times H \to H \times H$ por

$$V(x_1, x_2) := (-x_2, x_1). \tag{4.16}$$

Entonces $V^2 = -I$ y $V^2M = M$ para cualquier subespacio de $H \times H$.

4.5 Teorema. *Si T es un operador densamente definido entonces*

$$\mathcal{G}(T^*) = \Big(V\mathcal{G}(T)\Big)^{\perp}. \tag{4.17}$$

Demostración. Basta considerar la siguiente cadena de enunciados equivalentes dos a dos:

$$\begin{gathered} (y, z) \in \mathcal{G}(T^*) \\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T) \\ \langle (-Tx, x), (y, z)\rangle = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T) \\ (y, z) \in \Big(V\mathcal{G}(T)\Big)^{\perp}. \end{gathered}$$

□

4.6 Teorema. *Si T es densamente definido entonces T^* es cerrado. Particularmente, operadores autoadjuntos son cerrados.*

Demostración. Eso es una consecuencia del Teorema 4.5 porque el complemento ortogonal de un subespacio de un espacio de Hilbert es cerrado. □

4.7 Teorema. *Si T es densamente definido y cerrado, entonces*

$$H \times H = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*).$$

Demostración. Como V es unitario y $\mathcal{G}(T)$ cerrado, también $V\mathcal{G}(T)$ es cerrado. El resultado sigue por el Teorema 4.5. □

4.8 Ejemplo. Sea $H := L^2([0,1])$ respecto a la medida de Lebesgue. Definimos operadores T_1, T_2 y T_3 en H como sigue: Los dominios son

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T_1) &:= \{f\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ es absolutamente continuo y } f' \in L^2([0,1])\},\\
\mathcal{D}(T_2) &:= \{f \in \mathcal{D}(T_1) \mid f(0) = f(1)\}\\
\mathcal{D}(T_3) &:= \{f \in \mathcal{D}(T_1) \mid f(0) = f(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

Estos son densos en H. Definimos

$$T_k f := \mathrm{i} f' \qquad \text{para } f \in \mathcal{D}(T_k),\ k = 1, 2, 3.$$

Se tiene

$$T_3 \subsetneq T_2 \subsetneq T_1. \tag{4.18}$$

Afirmamos que

$$T_1^* = T_3, \qquad T_2^* = T_2, \qquad T_3^* = T_1. \tag{4.19}$$

Eso implica que $T_3 \subseteq T_1 = T_3^*$, es decir, T_3 es simétrico, T_2 es una extensión autoadjunta de T_3, y T_1 es una extensión no simétrica de T_2.

Para demostrar (4.19), notamos para $k, m \in \{1,2,3\}$ con $k + m = 4$, $f \in \mathcal{D}(T_k)$ y $g \in \mathcal{D}(T_m)$, que

$$f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)} = 0$$

y luego

$$\langle T_k f, g\rangle = \int_0^1 \mathrm{i} f'\bar{g} = -\int_0^1 \mathrm{i} f\bar{g}' = \int_0^1 f\,\overline{\mathrm{i}g'} = \langle f, T_m g\rangle.$$

Eso implica por la Nota 4.4 que

$$T_3 \subseteq T_1^*, \qquad T_2 \subseteq T_2^*, \qquad T_1 \subseteq T_3^*. \tag{4.20}$$

Basta demostrar $\mathcal{D}(T_k^*) \subseteq \mathcal{D}(T_m)$ para $k+m = 4$. Sea $g \in \mathcal{D}(T_k^*)$. Ponemos $\phi := T_k^* g \in H$ y $\Phi(t) := \int_0^t \phi$. Eso implica que

$$\Phi \in \mathcal{D}(T_1), \qquad \Phi(0) = 0. \tag{4.21}$$

Para todo $f \in \mathcal{D}(T_k)$ se sigue que

$$\int_0^1 \mathrm{i} f'\bar{g} = \langle T_k f, g\rangle = \langle f, \phi\rangle = f(1)\overline{\Phi(1)} - \int_0^1 f'\,\overline{\Phi}. \tag{4.22}$$

Si $k = 1$, entonces $1 \in \mathcal{D}(T_1)$, y con $f = 1$ (4.22) implica $0 = f(1)\overline{\Phi(1)} = \overline{\Phi(1)}$. Entonces (4.22) dice que

$$\int_0^1 \mathrm{i}f'\overline{(g + \mathrm{i}\Phi)} = f(1)\overline{\Phi(1)} = 0$$

para todo $f \in \mathcal{D}(T_1)$, es decir,

$$g + \mathrm{i}\Phi \in \mathcal{R}(T_1)^{\perp}. \tag{4.23}$$

Si $\psi \in H$, entonces $\Psi(t) := -\mathrm{i}\int_0^t \psi$ define un elemento de $\mathcal{D}(T_1)$ tal que $T_1\Psi = \psi$. Entonces $\mathcal{R}(T_1) = H$ y (4.23) implica que $g = -\mathrm{i}\Phi$. Como $\Phi(1) = 0$ y por (4.21), $g \in \mathcal{D}(T_3)$. Eso demuestra $\mathcal{D}(T_1^*) \subseteq \mathcal{D}(T_3)$.

Si $k = 3$ y $g \in \mathcal{D}(T_3^*)$, entonces $f \in \mathcal{D}(T_3)$ cumple $f(1) = 0$, es decir, (4.22) implica

$$g + \mathrm{i}\Phi \in \mathcal{R}(T_3)^{\perp}. \tag{4.24}$$

Cualquier $\psi \in \mathcal{R}(T_3)$ tiene la representación $\mathrm{i}\Psi'$, donde $\Psi \in \mathcal{D}(T_3)$. Entonces $\int_0^1 \psi = \mathrm{i}\int_0^1 \Psi' = \mathrm{i}(\Psi(1) - \Psi(0)) = 0$. Inversamente, si $\psi \in H$ cumple $\int_0^1 \psi = 0$, entonces la función $\Psi(t) := -\mathrm{i}\int_0^t \psi$ está en $\mathcal{D}(T_3)$, y $T_3\Psi = \psi$, es decir $\psi \in \mathcal{R}(T_3)$. Eso demuestra que

$$\mathcal{R}(T_3) = \Big\{\psi \in H \;\Big|\; \int_0^1 \psi = 0\Big\}. \tag{4.25}$$

Si Y es el subespacio de dimensión uno de H generado por la función constante 1, entonces

$$\mathcal{R}(T_3) = Y^{\perp}. \tag{4.26}$$

Por lo tanto, (4.24) dice que $g+\mathrm{i}\Phi$ es constante, y como $\Phi \in \mathcal{D}(T_1)$ y $Y \subseteq \mathcal{D}(T_1)$, $g \in \mathcal{D}(T_1)$. Eso demuestra que $\mathcal{D}(T_3^*) \subseteq \mathcal{D}(T_1)$.

Si $k = 2$ y $g \in \mathcal{D}(T_2^*)$, entonces como en el caso $k = 1$ la función 1 está en $\mathcal{D}(T_2)$, se tiene que $\Phi(1) = 0$ y

$$g + \mathrm{i}\Phi \in \mathcal{R}(T_2)^{\perp}. \tag{4.27}$$

Como en el caso $k = 3$ se verifica

$$\mathcal{R}(T_2) = \Big\{\psi \in H \;\Big|\; \int_0^1 \psi = 0\Big\}. \tag{4.28}$$

y luego

$$\mathcal{R}(T_2) = Y^{\perp}. \tag{4.29}$$

Por lo tanto, $g + \mathrm{i}\Phi \equiv \alpha$ es una constante, es decir, $g = -\mathrm{i}\Phi + \alpha$ para un escalar α. Como $\Phi(1) = 0$ y por (4.21), $g \in \mathcal{D}(T_2)$. Eso demuestra $\mathcal{D}(T_2^*) \subseteq \mathcal{D}(T_2)$.

4.9 Teorema. *Sea T un operador densamente definido y simétrico.*

(a) *Si* $\mathcal{D}(T) = H$*, entonces* T *es autoadjunto y* $T \in \mathcal{B}(H)$*.*

(b) *Si* T *es autoadjunto y inyectivo, entonces* $\mathcal{R}(T)$ *es denso en* H *y* T^{-1} *es autoadjunto.*

(c) *Si* $\mathcal{R}(T)$ *es denso en* H*, entonces* T *es inyectivo.*

(d) *Si* $\mathcal{R}(T) = H$*, entonces* T *es autoadjunto y* $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$*.*

Demostración. **(a):** Como $T \subseteq T^*$, se tiene $H = \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$, es decir, $\mathcal{D}(T^*) = H$ y $T = T^*$. Por lo tanto, T es cerrado (Teorema 4.6) y acotado, por el teorema de la gráfica cerrada.

(b): Demostremos primero que $\mathcal{R}(T)$ es denso. Sea $y \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Entonces $x \mapsto \langle Tx, y\rangle = 0$ es continuo en $x \in \mathcal{D}(T)$, es decir, $y \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ y $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Como $\mathcal{D}(T)$ es denso eso implica que $y = 0$. En seguida, $\mathcal{R}(T)$ es denso.

Lo que hemos demostrado dice que T^{-1} es densamente definido, con $\mathcal{D}(T^{-1} = \mathcal{R}(T)$, y existe $(T^{-1})^*$. Con la definición de V en (4.16) la cadena de equivalencias

$$\begin{aligned}(a,b) &\in \mathcal{G}(T^{-1})\\ (b,a) &\in \mathcal{G}(T)\\ (b,-a) &\in \mathcal{G}(-T)\\ (a,b) &\in V\mathcal{G}(-T)\end{aligned}$$

demuestra que

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = V\mathcal{G}(-T), \tag{4.30}$$

y la invariancia de subespacios de H bajo V^2 implica

$$V\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathcal{G}(-T). \tag{4.31}$$

Por ser autoadjunto, T es cerrado. Lo mismo aplica a $-T$. Como V es unitario (4.30) implica que T^{-1} es cerrado. Por el Teorema 4.7 se tiene

$$H \times H = V\mathcal{G}(T^{-1}) \oplus \mathcal{G}((T^{-1})^*) \tag{4.32}$$

y, usando (4.31) y $T^* = T$,

$$H \times H = V\mathcal{G}(-T) \oplus \mathcal{G}(-T) = \mathcal{G}(T^{-1}) \oplus V\mathcal{G}(T^{-1}). \tag{4.33}$$

Como estas descomposiciones son ortogonales, se sigue de (4.32) y (4.33) que

$$\mathcal{G}((T^{-1})^*) = V\mathcal{G}(T^{-1})^\perp = \mathcal{G}(T^{-1}),$$

es decir, $(T^{-1})^* = T^{-1}$.

(c): Sea $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx = 0$. Entonces $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$ para too $y \in \mathcal{D}(T)$. Entonces $x \perp \mathcal{R}(T)$ y luego $x = 0$.

(d): Por el inciso (c) T es inyectivo y $\mathcal{D}(T^{-1}) = H$. Sean $x, y \in H$. Entonces existen $u, v \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tu = x$ y $Tv = y$. Se sigue que

$$\langle T^{-1}x, y\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle,$$

es decir, T^{-1} es simétrico. El inciso (a) implica que T^{-1} es autoadjunto y $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, y $T = (T^{-1})^{-1}$ es autoadjunto por el inciso (b). $\square$

4.10 Teorema. *Si T es densamente definido y cerrado, entonces $\mathcal{D}(T^*)$ es denso y $T^{**} = T$.*

Demostración. Por el Teorema 4.7 tenemos la descomposición ortogonal

$$H \times H = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*). \tag{4.34}$$

Como V es una isometría, preserve la relación de ortogonalidad entre elementos de H, es decir, $(Vx)\perp(Vy)$ si $x \perp y$. Además, $V^2\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}(T)$. Entonces (4.34) implica la descomposición ortogonal

$$H \times H = \mathcal{G}(T) \oplus V\mathcal{G}(T^*). \tag{4.35}$$

Sea $x \in \mathcal{D}(T^*)^\perp$. Entonces todo $y \in \mathcal{D}(T^*)$ cumple $\langle x, y\rangle = 0$ y

$$\langle (0, x), (-T^*y, y)\rangle = 0. \tag{4.36}$$

En consecuencia, usando (4.35), $(0, x) \in (V\mathcal{G}(T^*))^\perp = \mathcal{G}(T)$, es decir, $x = T0 = 0$. Eso demuestra que $\mathcal{D}(T^*)^\perp = \{0\}$, es decir, $\mathcal{D}(T^*)$ es denso y T^{**} está bien definido.

Otra aplicación del Teorema 4.7 da la descomposición ortogonal

$$H \times H = V\mathcal{G}(T^*) \oplus \mathcal{G}(T^{**}). \tag{4.37}$$

Comparación de (4.35) y (4.37) implica

$$\mathcal{G}(T^{**}) = (V\mathcal{G}(T^*))^\perp = \mathcal{G}(T),$$

es decir, $T^{**} = T$. $\square$

El operador I siempre significará la identidad con dominio H.

4.11 Teorema. *Sean T densamente definido y cerrado y $Q := I + T^*T$.*

(a) *Q es una biyección de $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T)$ con H y existen $B, C \in \mathcal{B}(H)$ tales que $\|B\| \le 1$, $\|C\| \le 1$, $C = TB$ y*

$$B(I + T^*T) \subseteq (I + T^*T)B = I. \tag{4.38}$$

Además, $B \ge 0$, y T^*T es autoadjunto.

(b) *Si T' es la restricción de T a $\mathcal{D}(T^*T)$, entonces $\mathcal{G}(T')$ es denso en $\mathcal{G}(T)$.*

Demostración. Si $x \in \mathcal{D}(Q)$ entonces $Tx \in \mathcal{D}(T^*)$ y

$$\|x\|^2 \leq \langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, Qx\rangle \leq \|x\|\,\|Qx\|. \tag{4.39}$$

Esa desigualdad demuestra que Q es inyectivo.

La descomposición ortogonal del Teorema 4.7 implica para $h \in H$ la existencia única de elementos $Bh \in \mathcal{D}(T)$ y $Ch \in \mathcal{D}(T^*)$ tales que

$$(0, h) = (-TBh, Bh) + (Ch, T^*Ch). \tag{4.40}$$

Por la unicidad B y C son operadores lineales con dominio H. La ortogonalidad de la descomposición en (4.40) y la definición del producto escalar en $H \times H$ implican que

$$\|h\|^2 = \|TBh\|^2 + \|Bh\|^2 + \|Ch\|^2 + \|T^*Ch\|^2 \geq \|Bh\|^2 + \|Ch\|^2$$

para todo $h \in H$, es decir, $B, C \in \mathcal{B}(H)$ y $\|B\|, \|C\| \leq 1$.

Si comparamos las coordenadas en (4.40) obtenemos $C = TB$ y

$$h = Bh + T^*Ch = Bh + T^*TBh = QBh$$

para todo $h \in H$, es decir, $QB = I$. En seguida B es inyectivo y Q suprayectivo. Como ya sabemos que Q es inyectivo, Q es una biyección entre $\mathcal{D}(Q)$ y H.

Demostremos que $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(Q)$. Arriba se construyeron B y C de tal manera que para todo $h \in H$ $Bh \in \mathcal{D}(T)$ y $TBh = Ch \in \mathcal{D}(T^*)$, es decir, $Bh \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(Q)$. Inversamente, sea $x \in \mathcal{D}(Q)$. Como $QB = I$, existe $h \in H$ tal que $Qx = QBh$, es decir, $x = Bh \in \mathcal{R}(B)$ porque existe el mapeo inverso Q^{-1}. Por lo tanto, B es una biyección entre H y $\mathcal{D}(H)$, y su inversa es Q. Eso demuestra que $BQ = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(Q)} \subseteq I$ y comprueba (4.38).

Si $h \in H$ entonces $h = Qx$ para un $x \in \mathcal{D}(Q)$. En consecuencia,

$$\langle Bh, h\rangle = \langle BQx, Qx\rangle = \langle x, Qx\rangle \geq 0$$

por (4.39). Por lo tanto, $B \geq 0$ y B es autoadjunto por el Teorema 3.40. Como B es inyectivo, el Teorema 4.9(b) dice que $Q = B^{-1}$ es autoadjunto. Es fácil ver que entonces $T^*T = Q - I$ es autoadjunto. Eso termina la demostración de (a).

Para demostrar (b) notemos que $\mathcal{G}(T)$ es un espacio de Hilbert porque T es cerrado. Sea $(z, Tz) \in \mathcal{G}(T)$ ortogonal a $\mathcal{G}(T')$. Entonces se cumple para todo $x \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(Q)$ que

$$0 = \langle (z, Tz), (x, Tx)\rangle = \langle z, x\rangle + \langle Tz, Tx\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, T^*Tx\rangle = \langle z, Qx\rangle.$$

Como $\mathcal{R}(Q) = H$ eso implica que $z = 0$, es decir, $\mathcal{G}(T')$ es denso en $\mathcal{G}(T)$. $\square$

4.12 Definición. Un operador simétrico T es *maximalmente simétrico* si T no tiene extensión propia simétrica. Eso significa que si S es simétrico y cumple $T \subseteq S$, entonces $T = S$.

4.13 Teorema. *Operadores autoadjuntos son maximalmente simétricos.*

Demostración. Sean T autoadjunto y S simétrico tales que $T \subseteq S$. Si $y \in \mathcal{D}(S^*)$ entonces para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ se tiene $\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle$, es decir, el mapeo $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ es acotado. Por lo tanto, $y \in \mathcal{D}(T^*)$, y hemos demostrado que $\mathcal{D}(S^*) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$. Es claro que entonces $S^* \subseteq T^*$. Se sigue que

$$S \subseteq S^* \subseteq T^* = T \subseteq S,$$

y luego $S = T$. □

4.14 Nota. Veremos mas adelante que operadores maximalmente simétricos no necesariamente son autoadjuntos.

4.15 Teorema. *Sea T un operador simétrico, no necesariamente densamente definido. Entonces se cumplen:*

(a) $\|Tx + \mathrm{i}x\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$.

(b) *T es un operador cerrado si y sólo si $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ es cerrado en H.*

(c) *$T + \mathrm{i}I$ es inyectivo.*

(d) *Si $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I) = H$, entonces T es maximalmente simétrico.*

(e) *Las afirmaciones anteriores también están ciertas si uno reemplaza* i *por* $-\mathrm{i}$.

Demostración. **(a):** La simetría de T implica para $x \in \mathcal{D}(T)$ que

$$\begin{aligned}\|Tx + \mathrm{i}x\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle + \langle \mathrm{i}x, \mathrm{i}x\rangle + \langle Tx, \mathrm{i}x\rangle + \langle \mathrm{i}x, Tx\rangle \\ &= \langle Tx, Tx\rangle + \mathrm{i}(-\mathrm{i})\langle x, x\rangle - \mathrm{i}\langle Tx, x\rangle + \mathrm{i}\langle x, Tx\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 - \mathrm{i}\langle x, Tx\rangle + \mathrm{i}\langle x, Tx\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2.\end{aligned}$$

(c): Sea $y \in \mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$. Entonces existe $x \in \mathcal{D}(T + \mathrm{i}I) = \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx + \mathrm{i}x = y$. Por (a) $\|(x, Tx)\| = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|Tx + \mathrm{i}x\|^2 = \|y\|^2$, es decir, el mapeo $Tx + \mathrm{i}x \mapsto (x, Tx)$ es una isomería lineal entre $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ y $\mathcal{G}(T)$. En consecuencia, $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ es completo (cerrado en H) si y sólo si $\mathcal{G}(T)$ es completo (cerrado en $H \times H$).

(c): Es una consecuencia directa de (a).

(d): Sea $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I) = H$ y sea S una extensión propia de T. Entonces $S + \mathrm{i}I$ es una extensión propia de $T + \mathrm{i}I$. Como ese operador ya es suprayectivo, $S + \mathrm{i}I$ no puede ser inyectivo, es decir, no puede ser simétrico, por el inciso (c). Eso demuestra que T no tiene extensión propia simétrica.

(e): Es obvio. □

4.3. La transformada de Cayley

4.16 Nota. El mapeo
$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$
es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1,\ \lambda \neq 1\}$. En seguida el cálculo simbólico para operadores acotados establece una biyección entre operadores acotados autoadjuntos y operadores unitarios, cuyo espectro no contiene 1. En esta sección extendamos esa biyección a operadores simétricos no necesariamente acotados. Así los unitarios que surgen como arriba sí pueden tener 1 en su espectro.

4.17 Definición. Sea T un operador simétrico. Por el Teorema 4.15(c) $T + \mathrm{i}I$ es inyectivo y tiene inversa $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I) \to \mathcal{D}(T)$. Se define la *transformada de Cayley* U de T por $\mathcal{D}(U) := \mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)$ y

$$U := (T - \mathrm{i}I)(T+\mathrm{i}I)^{-1}. \tag{4.41}$$

En seguida, $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$.

4.18 Lema. *Sea U un operador en H que es una isometría: $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{D}(U)$.*

(a) *Si $x, y \in \mathcal{D}(U)$, entonces $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.*

(b) *Si $\mathcal{R}(I-U)$ es denso en H, entonces $I - U$ es inyectivo.*

(c) *Si uno de los espacios $\mathcal{D}(U)$, $\mathcal{R}(U)$ y $\mathcal{G}(U)$ es cerrado, entonces los otros dos también son cerrados.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^2 \neq 1$ y $\alpha^3 = 1$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{3} \alpha^n = \alpha \sum_{n=0}^{2} \alpha^n = \alpha \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha} = 0 \tag{4.42}$$

y

$$\sum_{n=1}^{3} \alpha^{2n} = \alpha^2 \sum_{n=0}^{2} (\alpha^2)^n = \alpha^2 \frac{1-(\alpha^2)^3}{1-\alpha^2} = 0. \tag{4.43}$$

Usando $|\alpha| = 1$, (4.42) y (4.43) calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3} \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3} \Big(\|x\|^2 + |\alpha^n|^2 \|y\|^2 + \overline{\alpha^n}\langle x, y\rangle + \alpha^n \langle y, x\rangle \Big)\alpha^n \\
&= \frac{1}{3}\left((\|x\|^2 + \|y\|^2) \sum_{n=1}^{3} \alpha^n + \langle y, x\rangle \sum_{n=1}^{3} \alpha^{2n} + \langle x, y\rangle \sum_{n=1}^{3} 1 \right) \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Esa identidad implica (a).

Para demostrar (b), sea $x \in \mathcal{D}(U)$ tal que $(I-U)x = 0$, es decir, $Ux = x$. En seguida, para todo $y \in \mathcal{D}(U)$ se tiene

$$\langle x, (I-U)y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, Uy\rangle = 0.$$

Entonces $x \in \mathcal{R}(I-U)^\perp = \{0\}$, es decir, $I-U$ es inyectivo.

Por las identidades

$$\|Ux\| = \|x\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x, Ux)\|_{H\times H} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(U)$$

sucesiones de Cauchy convergen en un espacio de los tres si y sólo si convergen en los dos otros espacios. Eso demuestra la afirmación. □

4.19 Teorema. *Sea U la transformada de Cayley de un operador simétrico T. Entonces se cumplen:*

(a) *U es cerrado si y sólo si T es cerrado.*

(b) *$\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(T)$, $I-U$ es inyectivo y T se puede recuperar de U por la fórmula*

$$T = \mathrm{i}(I+U)(I-U)^{-1}. \tag{4.44}$$

Eso implica que las transformadas de Cayley de operadores simétricos distintos son distintas.

(c) *U es unitario si y sólo si T es autoadjunto.*

(d) *Inversamente, si V es un operador en H que es una isometría, y si $I-V$ es inyectivo, entonces V es la transformada de Cayley de un operador simétrico en H.*

Demostración. **(a):** Por el Teorema 4.15(b) T es cerrado si y sólo si $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)$ es cerrado. Por el Lema 4.18(c) U es cerrado si y sólo si $\mathcal{D}(U)$ es cerrado. Como $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)$, eso implica la afirmación.

(b): Por el Teorema 4.15(c) el operador $T+\mathrm{i}I$ establece una biyección entre $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)$. Se cumplen para $x \in \mathcal{D}(T)$

$$z := Tx + \mathrm{i}x, \qquad Uz = Tx - \mathrm{i}x. \tag{4.45}$$

Eso implica

$$(I-U)z = 2\mathrm{i}x, \qquad (I+U)z = 2Tx. \tag{4.46}$$

Como

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(I-U)(T+\mathrm{i}I) = I_{\mathcal{D}(T)},$$

$(I-U)$ es inyectivo y $\mathcal{R}(I-U)=\mathcal{D}(T)$. Entonces $(I-U)^{-1}$ es una biyección entre $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(U)$, y

$$2Tx=(I+U)z=(I+U)(I-U)^{-1}(2\mathrm{i}x) \tag{4.47}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Eso comprueba (b).

(c): Sea T autoadjunto. Entonces

$$\mathcal{R}(I+T^2)=H \tag{4.48}$$

por el Teorema 4.11(a). Como

$$(T+\mathrm{i}I)(T-\mathrm{i}I)=I+T^2=(T-\mathrm{i}I)(T+\mathrm{i}I),$$

se sigue que

$$\mathcal{D}(U)=\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)=H \tag{4.49}$$

y

$$\mathcal{R}(U)=\mathcal{R}(T-\mathrm{i}I)=H. \tag{4.50}$$

Como U es una isometría, (4.49) implica que $U \in \mathcal{B}(H)$, y (4.50) dice que U es unitario, por el Teorema 3.16.

Inversamente, sea U unitario. Entonces $I-U$ es normal, y el inciso (b) y el Teorema 3.15(a) implican que

$$\mathcal{R}(I-U)^{\perp}=\mathcal{N}(I-U)=\{0\}, \tag{4.51}$$

es decir, $\mathcal{D}(T)=\mathcal{R}(I-U)$ es denso en H. Entonces T^* está bien definido, y se tiene $T \subseteq T^*$ porque T es simétrico.

Para demostrar $\mathcal{D}(T^*) \subseteq \mathcal{D}(T)$, sea $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Como $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)=\mathcal{D}(U)=H$ existe $y0 \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$(T^*+\mathrm{i}I)y=(T+\mathrm{i}I)y_0=(T^*+\mathrm{i}I)y_0. \tag{4.52}$$

Aquí la segunda identidad es cierta porque T es simétrico. Pongamos $y_1 := y-y_0$. Entonces $y_1 \in \mathcal{D}(T^*)$, y para todo $x \in\in \mathcal{D}(T)$ se tiene

$$\langle (T-\mathrm{i}I)x, y_1\rangle = \langle x, (T^*+\mathrm{i}I)y_1\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Eso significa que $y_1 \perp \mathcal{R}(T-\mathrm{i}I)=\mathcal{R}(U)=H$ y luego que $y_1=0$ y $y=y_0 \in \mathcal{D}(T)$. Eso comprueba (c).

(d): Como $I-V$ es inyectivo, $I-V\colon \mathcal{D}(V) \to \mathcal{R}(I-V)$ es una biyección. Definimos un operador S por $\mathcal{D}(S) := \mathcal{R}(I-V)$ y $S := \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}$. Si $x, y \in \mathcal{D}(S)$ entonces con $z := (I-V)^{-1}x$ y $u := (I-V)^{-1}y$ se tiene $z, u \in \mathcal{D}(V)$. Como V es una isometría, el Lema 4.18(a) implica que

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle = \mathrm{i}\langle z + Vz, u - Vu\rangle = \mathrm{i}\langle Vz, u\rangle - \mathrm{i}\langle z, Vu\rangle + \langle z, u\rangle - \langle Vz, Vu\rangle \\ = \langle z - Vz, \mathrm{i}u + \mathrm{i}Vu\rangle = \langle x, Sx\rangle.\end{aligned}$$

Entonces S es simétrico. Notemos que

$$x = z - Vz \qquad \text{y} \qquad Sx = \mathrm{i}(z + Vz)$$

implica que

$$2\mathrm{i}Vz = Sx - \mathrm{i}x \qquad \text{y} \qquad 2\mathrm{i}z = Sx + \mathrm{i}x$$

para todo $z \in \mathcal{D}(V)$. Por lo tanto,

$$V(Sx + \mathrm{i}x) = Sx - \mathrm{i}x$$

para todo $x \in \mathcal{D}(S)$ y $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(S + \mathrm{i}I)$. Entonces V es la transformada de Cayley de S. □

4.20 Definición. Sea T un operador densamente definido, cerrado y simétrico. Llamemos las dimensiones de $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)^\perp$ y $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)^\perp$ los *índices de deficiencia de* T.

4.21 Teorema. *Sea T densamente definido, cerrado y simétrico.*

(a) *T es autoadjunto si y sólo si ambos índices de deficiencia son cero.*

(b) *T es maximalmente simétrico si y sólo si por lo menos uno de sus índices de deficiencia es cero.*

(c) *T tiene una extensión autoadjunta si y sólo si sus índices de deficiencia coinciden.*

Demostración. Sea U la transformada de Cayley de T. Por el Teorema 4.15(b) los espacios $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ y $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$ son cerrados y U es una biyección entre ellos.

(a): Por el Teorema 4.19(c) T es autoadjunto si y sólo si U es unitario. Como U es una isometría, eso es el caso si y sólo si $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(U) = H$, es decir, si y sólo si $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I) = \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I) = H$. Eso comprueba la afirmación.

(b): Si $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)^\perp = \{0\}$, entonces por ser cerrado, $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I) = H$, y el Teorema 4.15(d) dice que T es maximalmente simétrico. El caso de $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I) = H$ se sigue similarmente por el Teorema 4.15(e).

Inversamente, sea T maximalmente simétrico. Por contradicción, supongamos que $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I) \neq \{0\} \neq \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$. Como estos espacios son cerrados, se construye fácilmente una extensión propia isométrica U_1 de U. Por el Teorema 4.19(d) existe un operador simétrico T_1 tal que U_1 es su transformada de Cayley. Este T_1 es una extensión propia de T, por el Teorema 4.19(b), en contradicción con que T es maximalmente simétrico.

(c): Los índices de deficiencia de T coinciden si y sólo si existe una biyección lineal entre $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ y $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$ que es una isometría. Eso es el caso si y sólo si U tiene una extensión unitaria, porque isometrías preservan producto escalares. Finalmente, U tiene una extensión unitaria si y sólo si T tiene una extensión autoadjunta, por el Teorema 4.19. □

4.22 Ejemplo. Sea $V := S_{\mathrm{D}}$ la translación a la derecha en l^2. Entonces V es una isometría tal que $I - V$ es inyectivo (Tarea 9, $\sigma_{\mathrm{p}}(S_{\mathrm{D}}) = \varnothing$). En seguida, V es la transformada de Cayley de un operador simétrico T. Además, $\mathcal{D}(V) = l^2$, y $\mathcal{R}(V)$ es un subespacio de codimensión 1, es decir, T es maximalmente simétrico pero no autoadjunto.

4.4. Resoluciones de la identidad

Regresamos a la notación anterior de resoluciones de la identidad: $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en un conjunto Ω, H es un espacio de Hilbert y $E\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad con las propiedades en el listado de la Definición 3.20. Nuestra meta es extender el cálculo simbólico Ψ dado en el Teorema 3.26 para funciones en $L^\infty(E)$ a funciones medibles.

4.23 Lema. *Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ medible. Definimos*

$$\mathcal{D}_f := \left\{ x \in H \;\middle|\; \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < \infty \right\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_f$ es un subespacio denso de H. Si $x, y \in H$, entonces

$$\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|E_{x,y}| \le \|y\| \left(\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.53}$$

Si f es acotado y $v = \Psi(f)z$, entonces

$$\mathrm{d}E_{x,v} = \bar{f} \,\mathrm{d}E_{x,z} \qquad \text{para todo } x, z \in H. \tag{4.54}$$

Demostración. Primero demostremos que $\mathcal{D}_f$ es un subespacio de H. Sea $x, y \in \mathcal{D}_f$, y pongamos $z := x + y$. Se tiene para cualquier $\omega \in \mathcal{M}$ que

$$\|E(\omega)\|^2 \le \Big(\|E(\omega)x\| + \|E(\omega)y\| \Big)^2 \le 2\|E(\omega)x\|^2 + 2\|E(\omega)y\|^2$$

y luego

$$E_{z,z}(\omega) \le 2E_{x,x}(\omega) + 2E_{y,y}(\omega).$$

Se sigue que $\mathcal{D}_f$ es cerrado algebráicamente bajo adición. Multiplicación por escalares se trata de manera todavía mas fácil. Ese demuestra que $\mathcal{D}_f$ es un subespacio de H.

Definimos para $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos medibles

$$\omega_n := \{ s \in \Omega \mid |f(s)| \le n \}. \tag{4.55}$$

Si $x \in \mathcal{R}(E(\omega_n))$, entonces

$$E(\omega)x = E(\omega)E(\omega_n)x = E(\omega \cap \omega_n)x$$

y luego

$$E_{x,x}(\omega) = E_{x,x}(\omega \cap \omega_n) \text{ para todo } \omega \in \mathcal{M}.$$

Se sigue que

$$\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\omega_n} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \leq n^2 \|x\|^2 < \infty,$$

es decir, $x \in \mathcal{D}_f$. Eso demuestra que $\mathcal{R}(E(\omega_n)) \subseteq \mathcal{D}_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in H$. El hecho de que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$ y la aditividad numerable de $\omega \mapsto E(\omega)y$ implican que

$$y = E(\Omega)y = \lim_{n\to\infty} E(\omega_n)y.$$

Como $E(\omega_n)y \in \mathcal{R}(E(\omega_n)) \subseteq \mathcal{D}_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $y \in \overline{\mathcal{D}_f}$. En consecuencia $\mathcal{D}_f$ es denso en H.

Para demostrar (4.53) sea primero f acotado. Fijamos $x, y \in H$. La representación polar de medidas complejas nos proporciona una función medible $v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $|v| \equiv 1$ y $\mathrm{d}E_{x,y} = v \,\mathrm{d}|E_{x,y}|$. Definimos

$$u(s) := \begin{cases} \frac{|f(s)|}{v(s)f(s)}, & f(s) \neq 0, \\ 1, & f(s) = 0. \end{cases}$$

Entonces $|u| \equiv 1$ y $ufv = |f|$ en Ω, y se cumple

$$uf \,\mathrm{d}E_{x,y} = ufv \,\mathrm{d}|E_{x,y}| = |f| \,\mathrm{d}|E_{x,y}|.$$

Entonces

$$\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|E_{x,y}| = \langle \Psi(uf)x, y\rangle \leq \|\Psi(uf)x\| \, \|y\|. \tag{4.56}$$

Por (3.22) se tiene

$$\|\Psi(uf)x\|^2 = \int_\Omega |uf|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}. \tag{4.57}$$

La combinación de (4.56) y (4.57) da (4.53) para funciones f acotadas. Si f no es acotado, definimos ω_n como en (4.55). Para todo $n \in \mathbb{N}$ (4.53) se cumple con f reemplazado por $\chi_{\omega_n} f$. Como $|E_{x,y}|$ y $E_{x,x}$ son medidas positivas y $|\chi_{\omega_n} f|$ converge a $|f|$ en los puntos de Ω monótonamente creciente. El teorema de convergencia monótona de Lebesgue dice que (4.53) se cumple.

Para todo g medible y acotado tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega g \,\mathrm{d}E_{x,v} = \langle \Psi(g)x, v\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(f)z\rangle = \langle \Psi(\bar{f})\Psi(g)x, z\rangle \\ = \langle \Psi(\bar{f}g)x, z\rangle = \int_\Omega g\bar{f} \,\mathrm{d}E_{x,z}. \end{aligned}$$

Como funciones indicadoras de conjuntos medibles son medibles y acotadas, eso implica (4.54). □

4.24 Teorema. *Sea E una resolución de la identidad en un conjunto Ω.*

(a) *A toda función medible $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ corresponde un operador densamente definido y cerrado $\Psi(f)$ en H, con dominio $\mathcal{D}(\Psi(f)) = \mathcal{D}_f$, que está caracterizado por*

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f \,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_f,\ y \in H \tag{4.58}$$

y que satisface

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \text{ para todo } x \in \mathcal{D}_f. \tag{4.59}$$

Ψ preserva adición en el siguiente sentido: Si f, g son medibles, entonces

$$\Psi(f) + \Psi(g) \subseteq \Psi(f+g). \tag{4.60}$$

Se cumple para $\alpha \in \mathbb{C}$ y f medible que

$$\Psi(\alpha f) = \alpha \Psi(f). \tag{4.61}$$

(b) *Ψ preserva multiplicación en el siguiente sentido: Si f y g son medibles, entonces*

$$\Psi(f)\Psi(g) \subseteq \Psi(fg) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}. \tag{4.62}$$

$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ si y sólo si $\mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g$.

(c) *Para toda función medible $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ se cumplen*

$$\Psi(f)^* = \Psi(\bar{f}) \tag{4.63}$$

y

$$\Psi(f)\Psi(f)^* = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)^*\Psi(f). \tag{4.64}$$

Demostración. **(a):** Si $x \in \mathcal{D}_f$ entonces el mapeo $\Lambda\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\Lambda y := \overline{\int_\Omega f \,\mathrm{d}E_{x,y}}$$

es una función lineal porque $E_{x,y}$ es conjugado lineal en y. Se tiene

$$\Big| \overline{\int_\Omega f \,\mathrm{d}E_{x,y}} \Big| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|E_{x,y}| \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

por (4.53). Entonces $\Lambda \in H^*$ y

$$\|\Lambda\| \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el teorema de representación de Riesz (Teorema 3.6) existe $\Psi(f)x \in H$ tal que

$$\Lambda y = \langle y, \Psi(f)x\rangle \text{ para todo } y \in H.$$

Se sigue (4.58) y

$$\|\Psi(f)x\|^2 \leq \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}. \tag{4.65}$$

Si f, g son medibles, entonces $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ implica que

$$\int_\Omega |f+g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \leq 2\int_\Omega (|f|^2 + |g|^2) \,\mathrm{d}E_{x,x} < \infty.$$

Eso implica que $\mathcal{D})f \cap \mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{D}_{f+g}$. Por lo tanto, (4.60) es una consecuencia de (4.58), ya que la integral depende de f linealmente. El hecho (4.61) es obvio.

Para demostrar (4.59) sean ω_n definidos como en (4.55), y definimos $f_n := \chi_{\omega_n} f$. Entonces $\mathcal{D}_{f-f_n} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$ porque los f_n son acotados. En consecuencia, (4.60) da $\Psi(f - f_n) = \Psi(f) - \Psi(f_n)$. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue demuestran que

$$\|\Psi(f)x - \Psi(f_n)x\|^2 = \|\Psi(f-f_n)x\|^2 \leq \int_\Omega |f - f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \to 0, \tag{4.66}$$

es decir, $\Psi(f_n)x \to \Psi(f)x$ en H y $f_n \to f$ en $L^2(E_{x,x})$, cuando $n \to \infty$, para todo $x \in \mathcal{D}_f$. Como f_n es acotado, (4.59) se cumple con f reemplazado por f_n (Teorema 3.26). Entonces (4.66) dice que (4.59) es cierto.

Que $\Psi(f)$ es cerrado se sigue de (4.63) (cuando esté demostrado), aplicado a $\bar{f}$ y del Teorema 4.6.

(b): Primero sea f acotado. Entonces $\mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{D}_{fg}$. Si $x \in \mathcal{D}_g$ y $z \in H$ y $v := \Psi(\bar{f})z$, entonces (4.54) implica que

$$\begin{aligned}\langle \Psi(f)\Psi(g)x, z\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(\bar{f})z\rangle = \langle \Psi(g)x, v\rangle &= \int_\Omega g \,\mathrm{d}E_{x,v} \\ &= \int_\Omega fg \,\mathrm{d}E_{x,z} = \langle \Psi(fg)x, z\rangle.\end{aligned}$$

En seguida,

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(fg)x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_g,\ f \text{ acotado.} \tag{4.67}$$

Si $y := \Psi(g)x$, se sigue de (4.67) y (4.59) que

$$\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{y,y} = \int_\Omega |fg|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_g,\ f \text{ acotado.}$$

Pensando en funciones indicadoras de conjuntos medibles en el lugar de f arriba, eso se puede escribir como

$$\mathrm{d}E_{y,y} = |g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}. \tag{4.68}$$

Ahora sea f medible, pero posiblemente no acotado. El conjunto $\mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g))$ consiste de todos $x \in \mathcal{D}_g$ tales que $y := \Psi(g)x \in \mathcal{D}_f$, y como (4.68) dice que $y \in \mathcal{D}_f$ si y sólo si $x \in \mathcal{D}_{fg}$, obtenemos

$$\mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}. \tag{4.69}$$

Si $x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$, si $y := \Psi(g)x$ y si definimos f_n como antes, entonces $y \in \mathcal{D}_f$, $f_n \to f$ en $L^2(E_{y,y})$ y $f_n g \to fg$ en $L^2(E_{x,x})$. Usando (4.66), y la ecuación (4.67) con f_n en lugar de f, se sigue que

$$\Psi(f)\Psi(g)x \;=\; \Psi(f)y \;=\; \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)y \;=\; \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)\Psi(g)x \;=\; \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n g)x \;=\; \Psi(fg)x,$$

es decir, $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ en $\mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$. Eso comprueba (4.62).

(c): Sean f medible, $x \in \mathcal{D}_f$ y $y \in \mathcal{D}_{\bar f} = \mathcal{D}_f$. Otra vez definiendo f_n como antes, se sigue de (4.66) que

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(\bar f_n)y\rangle = \langle x, \Psi(\bar f)y\rangle,$$

es decir, $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$ y

$$\Psi(\bar f) \subseteq \Psi(f)^*.$$

Basta demostrar que $\mathcal{D}(\Psi(f)^*) \subseteq \mathcal{D}_{\bar f}$. Sea $z \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$. Pongamos $v := \Psi(f)^* z$. Como χ_{ω_n} es acotado, $\mathcal{D}_{f_n} \subseteq \mathcal{D}_{\chi_{\omega_n}} = H$. La definición $f_n = f\chi_{\omega_n}$ y el inciso (b) implican

$$\Psi(f_n) = \Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_n}). \tag{4.70}$$

El operador acotado $\Psi(\chi_{\omega_n})$ es autoadjunto. Por lo tanto, (4.8) y el cálculo para funciones acotadas implican que

$$\Psi(\chi_{\omega_n})\Psi(f)^* \subseteq (\Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_n}))^* = \Psi(f_n)^* = \Psi(\bar f_n).$$

Entonces

$$\Psi(\chi_{\omega_n})v = \Psi(\bar f_n)z$$

y

$$\int_\Omega |f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{z,z} = \int_\Omega |\chi_{\omega_n}|^2 \,\mathrm{d}E_{v,v} \le E_{v,v}(\Omega) = \|v\|^2 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El teorema de la convergencia monótona de Lebesgue ahora dice que $z \in \mathcal{D}_{\bar f}$, y (4.63) está comprobado. La ecuación (4.64) es una consecuencia del inciso (b) porque $\mathcal{D}_{\bar f f} \subseteq \mathcal{D}_f$, ya que $E_{x,x}$ es una medida finita para todo $x \in H$. $\square$

4.25 Nota. Como en la demostración de (4.70) se tiene que $\mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g = H$ si g es acotado. Entonces la fórmula de multiplicación (Teorema 4.24(b)) implica que

$$\Psi(g)\Psi(f) \subseteq \Psi(gf) = \Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g) \qquad \text{si } g \text{ es acotado.} \tag{4.71}$$

Particularmente, si $g = \chi_\omega$ para un $\omega \in \mathcal{M}$, entonces $\Psi(\chi_\omega) = E(\omega)$ y

$$E(\omega)\Psi(f) \subseteq \Psi(f)E(\omega).$$

Para $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\omega))$ eso implica que

$$E(\omega)\Psi(f)x = \Psi(f)x,$$

es decir, $\Psi(f)(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\omega))) \subseteq \mathcal{R}(E(\omega))$. Esa inclusión se puede entender como una forma débil de existencia de subespacios invariantes.

4.26 Teorema. *En la situación del Teorema* 4.24 *se tiene* $\mathcal{D}_f = H$ *y* $\Psi(f) \in \mathcal{B}(H)$ *si y sólo si* $f \in L^\infty(E)$.

Demostración. Sea $\mathcal{D}_f = H$. Como $\Psi(f)$ es cerrado, el teorema de la gráfica cerrada dice que $\Psi(f) \in \mathcal{B}(H)$. Con $f_n = f\chi_{\omega_n}$ como en la demostración del Teorema 4.24 se sigue que

$$\|f_n\|_\infty = \|\Psi(f_n)\| = \|\Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_n})\| \leq \|\Psi(f)\|\,\|\Psi(\chi_{\omega_n})\| = \|\Psi(f)\|\,\|\chi_{\omega_n}\|_\infty \leq \|\Psi(f)\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $f \in L^\infty(E)$.

Inversamente, si $f \in L^\infty(E)$ entonces $\mathcal{D}_f = H$ por la definición de $\mathcal{D}_f$ y porque $f \in L^\infty(E_{x,x})$ para todo $x \in H$. Como en la primera parte de esta demostración se sigue que $\Psi(f) \in \mathcal{B}(H)$. □

4.27 Definición. Sea T un operador en H. El *conjunto resolvente* de T consiste de todos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es una biyección entre $\mathcal{D}(T)$ y H, y tal que $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. En otras palabras, λ está en el conjunto resolvente si y sólo si existe $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$S(T - \lambda I) \subseteq (T - \lambda I)S = I.$$

El *espectro* $\sigma(T)$ *de* T es el complemento del conjunto resolvente de T en $\mathbb{C}$.

4.28 Nota. El espectro es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Todo subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ (también el conjunto vacío) es el espectro de un operador en un espacio de Hilbert.

4.29 Teorema (Aplicación espectral)**.** *Sean E una resolución de la identidad en un conjunto Ω, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ medible y*

$$\omega_\alpha := f^{-1}(\alpha) \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{C}.$$

(a) *Si α está en el rango esencial de f respecto a E y $E(\omega_\alpha) \neq 0$, entonces $\Psi(f) - \alpha I$ no es inyectivo.*

(b) *Si α está en el rango esencial de f respecto a E y $E(\omega_\alpha) = 0$, entonces $\Psi(f) - \alpha I$ es una biyección entre $\mathcal{D}_f$ y un subespacio propio y denso de H, y existen vectores $x_n \in H$ tales que $\|x_n\| = 1$ y*

$$\lim_{n\to\infty}(\Psi(f)x_n - \alpha x_n) = 0.$$

(c) $\sigma(\Psi(f))$ *es el rango esencial de* f *respecto a* E.

4.30 Nota. En el caso (a) α está en el *espectro punto* de $\Psi(f)$. En el caso (b) α está en el *espectro continuo* de $\Psi(f)$, y se puede considerar un *valor propio aproximado.*

Demostración. Después de una translación de f por la función acotada constante α, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 0$.

(a)*:* Si $E(\omega_0) \neq 0$ entonces existe $x_0 \in \mathcal{R}(E(\omega_0))$ tal que $\|x_0\| = 1$. Como $f\chi_{\omega_0} = 0$ y χ_{ω_0} es acotada, el Teorema 4.24(b) implica que

$$\Psi(f)E(\omega_0) = \Psi(f)\Psi(\chi_{\omega_0}) = \Psi(f\chi_{\omega_0}) = 0.$$

En consecuencia, obtenemos

$$\Psi(f)x_0 = \Psi(f)E(\omega_0)x_0 = 0$$

y $\Psi(f)$ no es inyectivo.

(b)*:* Que 0 está en el rango esencial de f respecto a E podemos expresar de la siguiente manera: Si

$$\kappa_n := \{s \in \Omega \mid |f(s)| < 1/n\}$$

entonces $E(\kappa_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $x_n \in \mathcal{R}(E(\kappa_n))$ tales que $\|x_n\| = 1$. Como antes se tiene

$$\|\Psi(f)x_n\| = \|\Psi(f\chi_{\kappa_n})x_n\| \leq \|\Psi(f\chi_{\kappa_n})\| = \|f\chi_{\kappa_n}\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Entonces $\Psi(f)x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para demostrar la inyectividad de $\Psi(f)$ sea $\Psi(f)x = 0$ para un $x \in \mathcal{D}_f$. Se sigue que

$$\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \|\Psi(f)x\|^2 = 0.$$

Como $E(\omega_0) = 0$ y luego $E_{x,x}(\omega_0) = 0$, entonces tenemos que $|f|^2 > 0$ en casi todo punto de Ω respecto a $E_{x,x}$. Definimos

$$\pi_n := \{s \in \Omega \mid |f(s)|^2 \geq 1/n\} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que

$$E_{x,x}(\pi_n) = \int_{\pi_n} \mathrm{d}E_{x,x} \leq n \int_{\pi_n} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \leq n \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.72}$$

Como $\pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \dots$ y

$$\Omega \backslash \omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n,$$

se tiene por (4.72) que

$$\|x\|^2 = E_{x,x}(\Omega) = E_{x,x}(\Omega\backslash\omega_0) = \lim_{n\to\infty} E_{x,x}(\pi_n) = 0.$$

Eso demuestra que $\Psi(f)$ es inyectivo.

El rango esencial de $\bar{f}$ respecto a E es el conjugado del rango esencial de f. Además, $\bar{f}(s) = 0$ si y sólo si $f(s) = 0$. Entonces la discusión de arriba también aplica a $\bar{f}$ en vez de f y demuestra que $\Psi(f)^* = \Psi(\bar{f})$ es inyectivo. Si $y \perp \mathcal{R}(\Psi(f))$ entonces la función lineal $x \mapsto \langle \Psi(f)x, y\rangle = 0$ es acotada en $\mathcal{D}_f$, es decir, $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*) = \mathcal{D}_{\bar{f}}$ y

$$\langle x, \Psi(\bar{f})y\rangle = \langle \Psi(f)x, y\rangle = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_f.$$

Como $\mathcal{D}_f$ es denso, $\Psi(\bar{f})y = 0$, y la inyectividad da $y = 0$. Eso comprueba que $\mathcal{R}(\Psi(f))$ es denso.

Falta demostrar que $\mathcal{R}(\Psi(f))$ es un subespacio propio de H. La gráfica de $\Psi(f)^{-1}$ se obtiene de $\mathcal{G}(\Psi(f))$ mediante aplicación del operador unitario $(x, y) \mapsto (y, x)$ en $H \times H$. Como $\Psi(f)$ es cerrado y operadores unitarios son homeomorfismos, también $\Psi(f)^{-1}$ es cerrado. Si $\mathcal{R}(\Psi(f))$ fuera todo H, el teorema de la gráfica cerrada diría que $\Psi(f)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Pero eso estaría en contradicción con la existencia de la sucesión (x_n) construida antes. Eso termina la demostración del inciso (b).

(c)*:* Es una consecuencia de los incisos (a) y (b) que el rango esencial de f es un subconjunto de $\sigma(\Psi(f))$. Para demostrar la inclusión inversa, sea $\alpha \in \sigma(\Psi(f))$. Como antes podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 0$. Supongamos también, por contradicción, que 0 no está en el rango esencial de f. Entonces $g := 1/f \in L^\infty(E)$ y $fg = 1$. La fórmula de multiplicación implica que

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg) = \Psi(1) = I.$$

Eso comprueba que $\mathcal{R}(\Psi(f)) = H$. Como $|f| > 0$ en casi todo punto de Ω respecto a E, como antes se obtiene que $\Psi(f)$ es inyectivo. El teorema de la gráfica cerrada dice que $\Psi(f)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ y $0 \notin \sigma(\Psi(f))$, una contradicción. Entonces 0 está en el rango esencial de f. $\square$

4.31 Teorema (Principio de cambio de medida)**.** *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ σ-álgebras en conjuntos Ω y Ω', $E\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad y $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ un mapeo tal que $\Phi^{-1}(\omega') \in \mathcal{M}$ si $\omega' \in \mathcal{M}$. Definimos $E'\colon \mathcal{M}' \to \mathcal{B}(H)$ por $E'(w') := E(\Phi^{-1}(\omega'))$. Entonces E' es una resolución de la identidad y*

$$\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}E'_{x,y} = \int_{\Omega} (f \circ \Phi)\,\mathrm{d}E_{x,y} \tag{4.73}$$

para toda función $\mathcal{M}'$-medible $f\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ que hace que una de las integrales en (4.73) *existe.*

Demostración. Es muy fácil verificar que E' cumple con todas propiedades que son necesarias para que sea una resolución de la identidad. Si $\omega' \in \mathcal{M}'$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} \chi_{\omega'} \, \mathrm{d}E'_{x,y} = \int_{\omega'} \mathrm{d}E'_{x,y} = E'_{x,y}(\omega') = E_{x,y}(\Phi^{-1}(\omega'))\\ = \int_{\Phi^{-1}(\omega')} \mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\Omega} \chi_{\Phi^{-1}(\omega')} \, \mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\Omega} (\chi_{\omega'} \circ \Phi) \, \mathrm{d}E_{x,y},\end{aligned}$$

es decir, (4.73) se cumple para f igual a una función indicadora de un elemento de $\mathcal{M}'$. Por linealidad eso implica que (4.73) es cierto para f igual a una función simple en Ω'. Como $f \circ \Phi$ es simple en Ω si f es simple en Ω', la definición de la integral de Lebesgue dice que (4.73) se cumple para cualquier f que es medible. □

4.5. El teorema espectral

4.32 Teorema. *Sea A un operador autoadjunto en H, posiblemente no acotado. Entonces existe una y sólo una resolucion de la identidad E en $\mathbb{R}$ (la* descomposición espectral de *A) tal que*

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \, \mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A),\ y \in H. \tag{4.74}$$

Además, E es concentrado en $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, es decir, $E(\sigma(A)) = I$.

Demostración. Sea U la transformada de Cayley de T, y sea $S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Sea E' la descomposición espectral de U en S^1, dada en el Teorema 3.29, usando el Teorema 3.33. Por el Teorema 4.19(b) $I - U$ es inyectivo y luego $E'(\{1\}) = 0$, una consecuencia del Teorema 3.36(b). En seguida, basta considerar la restricción de E' a $\Omega' := S^1 \backslash \{1\}$. Así obtenemos

$$\langle Ux, y\rangle = \int_{\Omega'} \mathrm{id}_{\Omega'} \, \mathrm{d}E'_{x,y} \qquad \text{para todo } x, y \in H. \tag{4.75}$$

Definimos $f \colon \Omega' \to \mathbb{R}$ por

$$f(\lambda) := \frac{\mathrm{i}(1 + \lambda)}{1 - \lambda},$$

la inversa de la transformación de Möbius que usamos para definir la transformada de Cayley. En seguida, f es un homeomorfismo de Ω' y $\mathbb{R}$. Definimos $\Psi(f)$ como en el Teorema 4.24, reemplazando E por E':

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_{\Omega'} f \, \mathrm{d}E'_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_f,\ y \in H. \tag{4.76}$$

Como f sólo toma valores reales, $\Psi(f)$ es autoadjunto por el Teorema 4.24(c), y como $f(\lambda)(1 - \lambda) = \mathrm{i}(1 + \lambda)$ y $(1 - \lambda)$ es acotado en Ω', el Teorema 4.24(b) y la Nota 4.25 dicen que

$$\Psi(f)(I - U) = \mathrm{i}(I + U). \tag{4.77}$$

Como $\mathcal{D}(\mathrm{i}(I+U)) = H$, eso particularmente implica $\mathcal{R}(I-U) \subseteq \mathcal{D}(\Psi(f))$. Por el Teorema 4.19(b) se tiene

$$A(I-U) = \mathrm{i}(I+U) \tag{4.78}$$

y $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I-U) \subseteq \mathcal{D}(\Psi(f))$. Como $I-U$ es inyectivo, (4.77) y (4.78) implican que $\Psi(f)$ es una extensión autoadjunta del operador autoadjunto A. El Teorema 4.13 dice que $\Psi(f) = A$ y luego

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}E'_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A),\ y \in H. \tag{4.79}$$

Por el Teorema 4.29 $\sigma(A)$ es el rango esencial de f, es decir, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Como f es un homeomorfismo, podemos usar el Teorema 4.31 para definir una resolución de la identidad E en $\mathbb{R}$ por $E(\omega) := E'(f^{-1}(\omega))$. Se sigue que $E'(\omega') = E(f(\omega'))$ para todo $\omega' \in \mathcal{M}'$, la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en Ω', y obtenemos por el Teorema 4.31, junto con (4.79)

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} (f \circ f^{-1}) \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \,\mathrm{d}E_{x,y},$$

la representación (4.74).

Similarmente como en la demostración arriba, (4.75) puede ser derivado de (4.74) usando la inversa de la transformada de Cayley. Como la representación (4.75) es única por el Teorema 3.29, eso implica la unicidad de E. □

4.33 Teorema. *Sea A un operador autoadjunto en H.*

(a) $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *($A \geq 0$) si y sólo si* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$.

(b) *Si $A \geq 0$ entonces existe un y sólo un operador autoadjunto $B \geq 0$ tal que $B^2 = A$.*

Demostración. La demostración de (a) es tan similar a la del Teorema 3.40 que la omitimos.

Para demostrar (b), sea $A \geq 0$ y luego $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Si E es la descomposición espectral de A entonces

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A),\ y \in H, \tag{4.80}$$

donde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathrm{id}^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < \infty \right\}.$$

Sean $f(t) := \sqrt{t}$ y $B := \Psi(f)$, es decir,

$$\langle Bx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}_0^+} f \,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_f,\ y \in H. \tag{4.81}$$

Es fácil ver que $\mathcal{D}_{f^2} \subseteq \mathcal{D}_f$. Por lo tanto, el Teorema 4.24(b) implica que $B^2 = A$. Como f es real, B es autoadjunto, y como $f \geq 0$, la representación (4.81) dice que $B \geq 0$.

Para demostrar unicidad, sea C autoadjunto, $C \geq 0$, $C^2 = A$ y E^C su descomposición espectral:

$$\langle Cx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{d}E^C_{x,y} \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(C),\ y \in H.$$

Pongamos $\Omega = \Omega' := \mathbb{R}_0^+$, $\Phi(s) := s^2$ y

$$E'(\omega) := E^C(\Phi^{-1}(\omega)) \tag{4.82}$$

si $\omega \subseteq \mathbb{R}_0^+$ es Borel medible. Como Φ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}_0^+$, el Teorema 4.31 dice que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle C^2x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathrm{id}^2\, \mathrm{d}E^C_{x,y} = \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{d}E'_{x,y}. \tag{4.83}$$

La unicidad de E como descomposición espectral de A junto con (4.83) implica que $E' = E$. Por (4.82) E determina E^C, es decir, C. $\square$

4.34 Definición. Un operador T en H es *normal* si T es cerrado y densamente definido y si

$$T^*T = TT^*.$$

4.35 Teorema. *Sea N un operador normal en H. Entonces se cumplen:*

(a) $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$,

(b) $\|Nx\| = \|N^*x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(N)$,

(c) N *es maximalmente normal.*

Demostración. Primero sea $y \in \mathcal{D}(N^*N) = \mathcal{D}(NN^*)$. Se sigue que $\langle Ny, Ny\rangle = \langle y, N^*Ny\rangle$ porque $Ny \in \mathcal{D}(N^*)$, y $\langle N^*y, N^*y\rangle = \langle y, NN^*y\rangle$ porque $N^*y \in \mathcal{D}(N)$ y $N^{**} = N$ (Teorema 4.10). Como $N^*N = NN^*$ eso implica que

$$\|Ny\| = \|N^*y\| \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{D}(N^*N). \tag{4.84}$$

Ahora sea $x \in \mathcal{D}(N)$. Denotemos por N' la restricción de N a $\mathcal{D}(N^*N)$. Por el Teorema 4.11(b) (x, Nx) está en la cerradura de la Gráfica de N'. Por ello existen elementos $y_k \in \mathcal{D}(N^*N)$ tales que

$$y_k \to x \tag{4.85}$$

y

$$Ny_k \to Nx \tag{4.86}$$

cuando $k \to \infty$. Por (4.84) $(N^* y_k)$ es una sucesión de Cauchy en H, ya que (Ny_k) lo es. En seguida existe $z \in H$ tal que $N^* y_k \to z$. Como N^* es un operador cerrado, esto y (4.85) implican que $(x, z) \in \mathcal{G}(N^*)$. En consecuencia, $x \in \mathcal{D}(N^*)$, $z = N^* x$ y luego

$$\|N^* x\| = \|z\| = \lim_{k\to\infty} \|N^* y_k\| = \lim_{k\to\infty} \|Ny_k\| = \|Nx\|$$

por (4.86). Como $x \in \mathcal{D}(N)$ era arbitrario, eso demuestra (b) y $\mathcal{D}(N) \subseteq \mathcal{D}(N^*)$.

Notemos que N^* también es normal, ya que $N^{**} = N$. Entonces

$$\mathcal{D}(N^*) \subseteq \mathcal{D}(N^{**}) = \mathcal{D}(N).$$

Eso demuestra lo que falta del inciso (a).

Para demostrar (c) sea M normal y tal que $N \subseteq M$. Entonces $M^* \subseteq N^*$ (ver la demostración del Teorema 4.13) así que

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M^*) \subseteq \mathcal{D}(N^*) = \mathcal{D}(N) \subseteq \mathcal{D}(M).$$

En consecuencia, $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(N)$ y luego $M = N$. □

4.36 Teorema. *Todo operador normal en H tiene una y sólo una descomposición espectral que satisface*

$$\langle Nx, y\rangle = \int_{\sigma(N)} \mathrm{id}_{\sigma(N)}\, \mathrm{d}E_{x,y} \qquad \textit{para todo } x \in \mathcal{D}(N),\ y \in H. \tag{4.87}$$

Para todo subconjunto Borel medible $\omega \subseteq \sigma(N)$ se tiene que $E(\omega)N \subseteq NE(\omega)$, y si $S \in \mathcal{B}(H)$ conmuta con N, en el sentido $SN \subseteq NS$ entonces $E(\omega)S = SE(\omega)$.

Demostración. La idea de la demostración es construir un conjunto numerable de proyecciones ortogonales P_k en H que tienen rangos ortogonales dos a dos, tal que $x = \sum_k P_k x$ para todo $x \in H$, $P_k N \subseteq NP_k \in \mathcal{B}(H)$ y tal que cada NP_k es normal. El resultado seguirá aplicando el teorema espectral para operadores acotados (Teorema 3.29) a los NP_k.

Por el Teorema 4.11 existen $B, C \in \mathcal{B}(H)$ tales que $B \geq 0$, $\|B\| \leq 1$, $C = NB$ y

$$B(I + N^*N) \subseteq (I + N^*N)B = I. \tag{4.88}$$

Como $N^*N = NN^*$ esto implica que

$$BN = BN(I + N^*N)B = B(I + N^*N)NB \subseteq NB = C. \tag{4.89}$$

En consecuencia, $BC = B(NB) = (BN)B \subseteq CB$. Como B y C son acotados se sigue que $BC = CB$. Entonces C conmuta con toda función de Borel acotada de B (Teorema 3.30(g)).

Escogemos una sucesión estrictamente decreciente $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq (0, 1]$ tal que $t_0 = 1$ y $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Denotamos por p_k la función característica de $(t_k, t_{k-1}]$, $k = 1, 2, \ldots,$ y definimos $f_k(t) := p_k(t)/t$. Toda función f_k es Borel medible y acotada en $\sigma(B) \subseteq [0,1]$. Sea E^B la descomposición espectral de B. La igualdad (4.88) muestra que B es inyectiva, es decir, 0 no está en el espectro punto de B. En seguida, $E^B(\{0\}) = 0$ y E^B está concentrada en $(0,1]$.

Definimos

$$P_k := p_k(B) = E^B((t_k, t_{k-1}]), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.90}$$

Para $k \neq \ell$ y $x, y \in H$ se sigue que $p_k p_\ell \equiv 0$,

$$\langle P_k x, P_\ell y\rangle = \langle P_\ell P_k x, y\rangle = \langle p_\ell(B) p_k(B) x, y\rangle = \langle (p_\ell p_k)(B) x, y\rangle = 0$$

y luego que

$$\mathcal{R}(P_k) \perp \mathcal{R}(P_\ell) \qquad \text{si } k \neq \ell. \tag{4.91}$$

Como $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = \chi_{(0,1]}$ la aditividad numerable de la medida vectorial $E^B x$ (Proposición 3.22) implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k x = E^B((0,1])x = x \qquad \text{para todo } x \in H. \tag{4.92}$$

Como $p_k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} f_k$ y f_k es acotada

$$NP_k = NBf_k(B) = Cf_k(B) \in \mathcal{B}(H). \tag{4.93}$$

Además, (4.89) implica que

$$P_k N = f_k(B) BN \subseteq f_k(B) C = C f_k(B) = NP_k. \tag{4.94}$$

Por (4.93) $\mathcal{D}(NP_k) = H$, así que

$$\mathcal{R}(P_k) \subseteq \mathcal{D}(N) \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.95}$$

En consecuencia, si $x \in \mathcal{R}(P_k)$ (4.94) implica que $P_k N x = NP_k x = Nx$, o, en otras palabras, que $\mathcal{R}(P_k)$ es un subespacio invariante de N.

Mostraremos ahora que cada operador NP_k es normal. Por (4.94), por el Teorema 4.2 y como $P_k \in \mathcal{B}(H)$

$$(NP_k)^* \subseteq (P_k N)^* = N^* P_k. \tag{4.96}$$

Pero ya sabemos por (4.93) que $(NP_k)^* \in \mathcal{B}(H)$ así que $\mathcal{D}((NP_k)^*) = H$. Entonces

$$(NP_k)^* = N^* P_k \tag{4.97}$$

y el Teorema 4.35(b) muestra, junto con (4.95) y (4.97), que

$$\|NP_k x\| = \|N^* P_k x\| = \|(NP_k)^* x\| \qquad \text{para todo } x \in H. \tag{4.98}$$

Por el Teorema 3.15 esto implica que NP_k es normal. Junto con (4.92), (4.93) y (4.94) hemos logrado la construcción de los P_k anunciada al inicio de esta demostración.

Sea $\mathcal{M}$ la colección de los subconjuntos de Borel de $\mathbb{C}$. Por el Teorema 3.29 todo NP_k tiene una descomposición espectral E^k en $(\mathbb{C}, \mathcal{M})$. Como $\mathcal{R}(P_k)$ es invariante bajo N, P_k conmuta con NP_k. Entonces P_k conmuta con todo $E^k(\omega)$, donde $\omega \in \mathcal{M}$. En seguida,

$$E^k(\omega) P_k x = P_k E^k(\omega) x \in \mathcal{R}(P_k) \qquad \text{para todo } x \in H,\ k = 1, 2, 3, \dots. \tag{4.99}$$

Usando que los rangos de los P_k son ortogonales dos a dos, (4.92) implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|E^k(\omega) P_k x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 = \|x\|^2. \tag{4.100}$$

En seguida, la serie $\sum E^k(\omega) P_k x$ converge en la norma de H (Teorema 3.7) y podemos definir $E(\omega)\colon H \to H$ por

$$E(\omega)x := \sum_{k=1}^{\infty} E^k(\omega) P_k x. \tag{4.101}$$

Se tiene además que

$$\|E(\omega)x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|E^k(\omega) P_k x\|^2. \tag{4.102}$$

Obviamente los mapeos $E(\omega)$ son operadores lineales. La ecuaciones (4.100) and (4.102) implican que $E(\omega) \in \mathcal{B}(H)$ con $\|E(\omega)\| \leq 1$.

Mostremos que E es una resolución de la identidad en $(\mathbb{C}, \mathcal{M})$. Usando (4.92) y el hecho de que E^k es una resolución de la identidad para cada $k \in \mathbb{N}$, los incisos (a) and (d) de la Definición 3.20 son fáciles de demostrar. Sea $\omega \in \mathcal{M}$. Para $x, y \in H$ calculamos, usando la continuidad de $E^k(\omega)$ y P_k, (4.95) y (4.99):

$$\begin{aligned} E(\omega)^2 x &= E(\omega)\left(\sum_{k=1}^{\infty} E^k(\omega) P_k x\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} E^\ell(\omega) P_\ell \left(\sum_{k=1}^{\infty} E^k(\omega) P_k x\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E^\ell(\omega) P_\ell E^k(\omega) P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} E^k(\omega)^2 P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} E^k(\omega) P_k x = E(\omega)x. \end{aligned}$$

Entonces $E(\omega)$ es una proyección. Además,

$$\begin{aligned} \langle E(\omega)x, y \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle E^k(\omega) P_k x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle E^k(\omega) P_k x, P_k y \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle P_k x, E^k(\omega) P_k y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, E^k(\omega) P_k y \rangle = \langle x, E(\omega) y \rangle, \end{aligned} \tag{4.103}$$

es decir, $E(\omega)$ es autoadjunto. El Teorema 3.17 implica que $E(\omega)$ es una proyección ortogonal, comprobando el inciso (b) de la Definición 3.20. El inciso (c) de esa definición se sigue de manera similar.

Falta demostrar que $E_{x,y}$, definido por (3.19) para $x, y \in H$, es una medida compleja regular. Para ello sea $\{\omega_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ una colección de subconjuntos ajenos de $\mathbb{C}$ y sea $\omega := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \omega_\ell$. Por la propiedad (c) de la Definición 3.20 $\mathcal{R}(E(\omega_{\ell_1}))\perp\mathcal{R}(E(\omega_{\ell_2}))$ si $\ell_1 \neq \ell_2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ el mapeo $E^k_{x,y}$ es una medida compleja. Usando (4.102) y la Proposición 3.22 obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty}\|E(\omega_\ell)x\|^2 &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|E^k(\omega_\ell)P_kx\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\|E^k(\omega_\ell)P_kx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\|E^k(\omega)P_kx\|^2 = \|E(\omega)x\|^2.
\end{aligned}
\tag{4.104}
$$

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\langle E(\omega)x, E(\omega_\ell)x\rangle = \langle E(\omega_\ell)x, E(\omega)x\rangle = \langle E(\omega_\ell)x, E(\omega_\ell)x\rangle = \|E(\omega_\ell)x\|^2$$

porque $\omega \cap \omega_\ell = \omega_\ell$. Se sigue para $n \in \mathbb{N}$ que

$$
\begin{aligned}
\|E(\omega)x - \sum_{\ell=1}^{n} E(\omega_\ell)x\|^2 &= \|E(\omega)x\|^2 - 2\sum_{\ell=1}^{n}\|E(\omega_\ell)x\|^2 + \sum_{\ell=1}^{n}\|E(\omega_\ell)x\|^2 \\
&= \|E(\omega)x\|^2 - \sum_{\ell=1}^{n}\|E(\omega_\ell)x\|^2.
\end{aligned}
$$

Junto con (4.104) eso implica que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} E(\omega_\ell)x = E(\omega)x.$$

En consecuencia,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} E_{x,y}(\omega_\ell) = \left\langle \sum_{\ell=1}^{\infty} E(\omega_\ell)x, y \right\rangle = \langle E(\omega)x, y\rangle = E_{x,y}(\omega)$$

y $E_{x,y}$ es numerablemente aditivo. Y por último, $E_{x,y}$ es automáticamente regular porque está definida sobre los subconjuntos de Borel de $\mathbb{C}$.

Definimos el operador normal M por

$$\langle Mx, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{id}\,\mathrm{d}E_{x,y} \qquad x \in \mathcal{D}(M),\ y \in H, \tag{4.105}$$

donde

$$\mathcal{D}(M) := \left\{ x \in H \;\middle|\; \int_{\mathbb{C}} |\mathrm{id}|^2\,\mathrm{d}E_{x,y} < \infty \right\}.$$

Si podemos demostrar que $M = N$, entonces el Teorema 4.29(c) implica que $\sigma(N) = \mathcal{R}_{\mathrm{ess}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ con respecto a E, es decir, $E(\mathbb{C}\backslash\sigma(N)) = 0$. En otras palabras, E está concentrado en $\sigma(N)$ y podemos reemplazar $\mathbb{C}$ por $\sigma(N)$ como dominio de integración en (4.105). Esto demostrará (4.87).

Sea $x \in \mathcal{D}(N)$. Como en (4.103) se sigue que $E_{x,x}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} E^k_{x_k,x_k}(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{M}$, donde definimos $x_k := P_k x$. Por (4.94) $P_k N x = N P_k x = N P_k x_k$, así que (3.22) y (4.92) implican que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{C}}|\mathrm{id}|^2\,\mathrm{d}E^k_{x_k,x_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\|NP_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\|P_k N x\|^2 = \|Nx\|^2. \tag{4.106}$$

Claramente $E^k_{x_k,x_k} \ll E_{x,x}$, es decir, $E^k_{x_k,x_k}$ es absolutamente continuo con respeto a $E_{x,x}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Radon-Nikodym existe $h_k \in L^1(E_{x,x})$ tal que $\mathrm{d}E^k_{x_k,x_k} = h_k\,\mathrm{d}E_{x,x}$. Para todo $\omega \in \mathcal{M}$ se sigue por [10, Theorem 1.27] que

$$\int_\omega \mathrm{d}E_{x,x} = E_{x,x}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} E^k_{x_k,x_k}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\omega h_k\,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_\omega\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k\right)\mathrm{d}E_{x,x},$$

y [10, Theorem 1.39(b)] implica que $\sum_{k\in\mathbb{N}} h_k = 1$ c.d. en $\mathbb{C}$. Usando (4.106) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}|\mathrm{id}|^2\,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\mathrm{id}|^2 h_k\right)\mathrm{d}E_{x,x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{C}}|\mathrm{id}|^2 h_k\,\mathrm{d}E_{x,x}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{C}}|\mathrm{id}|^2\,\mathrm{d}E^k_{x_k,x_k} = \|Nx\|^2 < \infty,\end{aligned}$$

es decir, $x \in \mathcal{D}(M)$. Eso muestra que

$$\mathcal{D}(N) \subseteq \mathcal{D}(M). \tag{4.107}$$

Si $x \in \mathbb{R}(P_k)$ entonces $P_\ell x = 0$ para todo $\ell \neq k$ y luego $E(\omega)x = E^k(\omega)x$ y $E_{x,y}(\omega) = E^k_{x,y}(\omega)$ para todo $y \in H$ y $\omega \in \mathcal{M}$. En seguida,

$$\langle Nx, y\rangle = \langle NP_k x, y\rangle = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E^k_{x,y} = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle Mx, y\rangle$$

y luego

$$P_k N x = N P_k x = M P_k x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(N),\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.108}$$

Ponemos $Q_k := P_1 + P_2 + \cdots + P_k$. Entonces $Q_k N x = M Q_k x$ y

$$(Q_k x, Q_k N x) \in \mathcal{G}(M) \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(N),\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.109}$$

Como $\mathcal{G}(M)$ es cerrado esto y (4.92) implican que $(x, Nx) \in \mathcal{G}(M)$, es decir, que $Nx = Mx$ para todo $x \in \mathcal{D}(N)$. Por (4.107) obtenemos que $N \subseteq M$. Y como N y M son operadores normales el Teorema 4.35(c) implica que $M = N$. Eso termina la demostración de (4.87).

Mostremos la unicidad de E si E es una resolución de la identidad definida en $\sigma(N)$ tal que (4.87) se cumple. El operador N^*N es autoadjunto (Teorema 4.11(a)), $N^*N \geq 0$ porque $\langle N^*Nx, x\rangle = \langle Nx, Nx\rangle \geq 0$ para todo $x \in D(N^*N)$, y luego existe una única raíz cuadrada positiva $S := \sqrt{N^*N}$ (Teorema 4.33(a)). Por el mismo teorema $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ asi que $\sigma(I+S) \subseteq [1, \infty)$. Por ello $(I+S)$ tiene una inversa en $\mathcal{B}(H)$ y el operador

$$T := N(I+S)^{-1} \tag{4.110}$$

está bien definido.

Sea $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Consideramos la función $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, dada por

$$f(\lambda) := \frac{\lambda}{1+|\lambda|}.$$

Entonces f es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$. Es fácil ver que

$$D_{|\mathrm{id}|^2} \subseteq D_{|\mathrm{id}|} = D_{\overline{\mathrm{id}}} = D_{\mathrm{id}} = D(N)$$

respecto a la resolución de la identidad E. Entonces el Teorema 4.24 implica que

$$\Psi(|\mathrm{id}|)\Psi(|\mathrm{id}|) = \Psi(|\mathrm{id}|^2) = \Psi(\overline{\mathrm{id}}\,\mathrm{id}) = \Psi(\overline{\mathrm{id}})\Psi(\mathrm{id}) = N^*N.$$

Además, $\Psi(|\mathrm{id}|) \geq 0$ porque $|\mathrm{id}|$ es una función real no negativa (Teorema 4.29 y Teorema 4.33(a)). Por unicidad de la raíz cuadrada positiva de N^*N, $S = \Psi(|\mathrm{id}|)$. Definimos

$$A := \int_{\sigma(N)} \frac{1}{1+|\mathrm{id}|}\,\mathrm{d}E,$$

así que $A \in \mathcal{B}(H)$. Por el Teorema 4.24

$$A(I+S) \subseteq (I+S)A = I,$$

es decir, $A = (I+S)^{-1}$. Eso demuestra que

$$T = \Psi(f) \in \mathcal{B}(H), \tag{4.111}$$

ya que f es acotada. Además T es normal, por el Teorema 4.24.

Sea E^T la descomposición espectral de T según el Teorema 3.29. Sea E' la resolución de la identidad en $\sigma(T)$ dada por

$$E'(\omega) := E(f^{-1}(\omega))$$

(Teorema 4.31). Aquí usamos que f es un homeomorfismo. Entonces ese mismo teorema implica que

$$T = \int_{\sigma(N)} f\,\mathrm{d}E = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\,\mathrm{d}E'.$$

Por la unicidad de E^T concluimos que $E' = E^T$, es decir,

$$E(\omega) = E^T(f(\omega))$$

para cada subconjunto Borel medible de $\sigma(N)$. En consecuencia, la resolución E está úncamente determinada por el operador T, el cual no depende de E, sólo de N. Eso muestra la unicidad de E.

Mostremos los dos enunciados faltantes. Si $\omega \in \mathcal{M}$ entonces χ_ω es una función de Borel acotada. Como $E(\omega) = \Psi(\chi_\omega)$ y $D_{\chi_\omega} = H$ se sigue del Teorema 4.24(b) que

$$E(\omega)N = \Psi(\chi_\omega)\Psi(\mathrm{id}) \subseteq \Psi(\chi_\omega \mathrm{id}) = \Psi(\mathrm{id})\Psi(\chi_\omega) = NE(\omega). \tag{4.112}$$

Si $S \in \mathcal{B}(H)$ satisface $SN \subseteq NS$, definimos $Q_n := E(\omega_n)$, donde

$$\omega_n := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Como en (4.169), usando adicionalmente que $f_n := \mathrm{id}\chi_{\omega_n}$ es acotado, obtenemos que

$$Q_nN \subseteq \Psi(f_n) = NQ_n = \Psi(\chi_{\omega_n} f_n) = \Psi(\chi_{\omega_n})\Psi(f_n) = Q_nNQ_n \in \mathcal{B}(H) \tag{4.113}$$

y NQ_n es un operador normal (Teorema 4.24(c)). Además, (4.168) y la hipótesis implican que

$$(Q_nSQ_n)(NQ_n) = Q_nSNQ_n \subseteq Q_nNSQ_n \subseteq (NQ_n)(Q_nSQ_n).$$

Como $(Q_nSQ_n)(NQ_n) \in \mathcal{B}(H)$ las contenciones arriba son igualdades, así que

$$(Q_nSQ_n)(NQ_n) = (NQ_n)(Q_nSQ_n). \tag{4.114}$$

Es fácil ver para $\omega \in \mathcal{M}$ que

$$f_n^{-1}(\omega) = \begin{cases} \omega \cap \omega_n, & 0 \notin \omega, \\ \omega \cup (\mathbb{C}\backslash\omega_n), & 0 \in \omega, \end{cases}$$

así que $f_n^{-1}(\omega) \in \mathcal{M}$. Definimos una resolución de la identidad E_n' en $\mathcal{M}$ por $E_n'(\omega) := E(f_n^{-1}(\omega))$. Se sigue por el Teorema 4.31 que

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{id}\, \mathrm{d}E_n' = \int_{\mathbb{C}} f_n\, \mathrm{d}E = NQ_n.$$

Por unicidad, E_n' es la descomposición espectral de NQ_n, y por (4.170) Q_nSQ_n conmuta con cada $E_n'(\omega)$. Calculamos

$$\begin{aligned} Q_nE_n'(\{0\}) = Q_nE(f_n^{-1}(0)) = Q_nE(\{0\} \cup (\mathbb{C}\backslash\omega_n)) & \\ = Q_n\Big(E(\{0\}) + I - Q_n\Big) = Q_nE(\{0\}) & \end{aligned}$$

y luego para cualquier $\omega \in \mathcal{M}$:

$$Q_n E'_n(\omega \cap \{0\}) = Q_n E(\omega \cap \{0\}). \tag{4.115}$$

Se sigue para $\omega \in \mathcal{M}$ tal que $\omega \subseteq \omega_n$:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E(\omega \cap \omega_n) = Q_n E(\omega) = Q_n\Big(E(\omega\backslash\{0\}) + E(\omega \cap \{0\})\Big) \\ &= Q_n\Big(E(f^{-1}(\omega\backslash\{0\})) + E(\omega \cap \{0\})\Big) = Q_n\Big(E'_n(\omega\backslash\{0\}) + E'_n(\omega \cap \{0\})\Big) \\ &= Q_n E'_n(\omega), \qquad \omega \subseteq \omega_n. \end{aligned} \tag{4.116}$$

Sean $\omega \in \mathcal{M}$ acotado y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\omega \subseteq \omega_n$. Por (4.172)

$$Q_n S E(\omega) = Q_n T Q_n E'_n(\omega) = Q_n E'_n(\omega) Q_n S Q_n = E(\omega) Q_n S Q_n.$$

Se sigue por la aditividad numerable de $E(\omega)x$ para cada $x \in H$ que $Q_n x \to x$ y $Q_n S Q_n x \to Sx$ cuando $n \to \infty$. Aquí usamos que $Q_n, S \in \mathcal{B}(H)$ y que $\|Q_n\| \leq 1$ para todo n. En consecuencia,

$$SE(\omega) = E(\omega)S, \qquad \text{para todo } \omega \in \mathcal{M} \text{ que es acotado.} \tag{4.117}$$

Si $\omega \in \mathcal{M}$ es arbitrario, (4.173) implica que

$$SE(\omega \cap \omega_n) = E(\omega \cap \omega_n)S \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.118}$$

Nuevamente por la aditividad numerable de Ex para todo $x \in H$ se sigue que (4.173) es cierto para cualquier $\omega \in \mathcal{M}$, dejando $n \to \infty$ en (4.178). □

4.6. Continuidad fuerte

Si X, Y son espacios de Banach, el conjunto

$$Y^X := \{\varphi\colon X \to Y\} = \prod_{x \in X} Y$$

de los mapeos $X \to Y$ tiene la topología natural del producto. Ella está definida como la topología más gruesa tal que todas proyecciones $p_x\colon Y^X \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$, son continuas. La topología del producto tiene la siguiente propiedad universal: Si Λ es un espacio topológico y si $f\colon \Lambda \to Y^X$ es un mapeo, entonces f es continuo si y sólo si $p_x \circ f$ es continuo para todo $x \in X$ o, equivalentemente, si y sólo si $\lambda \mapsto f(\lambda)(x)$ es continuo para todo $x \in X$. Esa es la razón porque esta topología en Y^X se llama también la topología de convergencia en puntos.

Como $\mathcal{B}(X,Y) \subseteq Y^X$, podemos considerar el espacio $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y)$ de los operadores lineales acotados entre X y Y, con la topología inducida de convergencia en puntos. Usando la propiedad universal de la topología de Y^X dada en el párrafo anterior obtenemos que un mapeo $f\colon \Lambda \to \mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y)$ es continuo en λ_0 si y sólo si el mapeo $\lambda \mapsto f(\lambda)x$ de Λ en Y es continuo en λ_0 para todo $x \in X$. Si eso es el caso, entonces decimos que f *es fuertemente continuo en* λ_0. Si f es fuertemente continuo en todo $\lambda \in \Lambda$, entonces f *es fuertemente continuo en* Λ.

4.37 Proposición. *Sean Λ un espacio métrico y X, Y espacios de Banach.*

(a) *Sean $f \in C(\Lambda, \mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y))$ y $u \in C(\Lambda, X)$. Entonces el mapeo $\lambda \mapsto f(\lambda)u(\lambda)$ es un elemento de $C(\Lambda, Y)$.*

(b) *Sean $f\colon \Lambda \to \mathcal{B}(X,Y)$ un mapeo y $\lambda_0 \in \Lambda$ tales que f es localmente acotado en λ_0. Si X_1 es un subespacio denso de X tal que*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda)x = f(\lambda_0)x \tag{4.119}$$

para todo $x \in X_1$, entonces f es fuertemente continuo en λ_0.

Demostración. **(a):** Fijamos $\lambda_0 \in \Lambda$ y sea $\lambda_n \to \lambda_0$ una sucesión convergente en Λ. Entonces

$$\begin{aligned}&\|f(\lambda_n)u(\lambda_n) - f(\lambda_0)u(\lambda_0)\|\\ &\qquad\le \|f(\lambda_n)\|\,\|u(\lambda_n) - u(\lambda_0)\| + \|f(\lambda_n)u(\lambda_0) - f(\lambda_0)u(\lambda_0)\| \to 0\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ por las hipótesis y porque f es localmente acotado en λ_0.

(b): Sea $\lambda_n \to \lambda_0$ convergente en Λ. Como $f(\lambda_n)$ es acotado en $\mathcal{L}(X,Y)$, existe $C > 0$ tal que $\|f(\lambda_n)\|, \|f(\lambda_0)\| \le C$ para todo n. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $y \in X_1$ tal que $\|x-y\| \le \varepsilon/3C$. Existe n_0 tal que $\|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| \le \varepsilon/3$ para $n \ge n_0$. En consecuencia

$$\begin{aligned}&\|f(\lambda_n)x - f(\lambda_0)x\|\\ &\qquad\le \|f(\lambda_n)\|\,\|x-y\| + \|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| + \|f(\lambda_0)\|\,\|x-y\| \le \varepsilon\end{aligned}$$

para $n \ge n_0$. Eso demuestra que $f(\lambda_n)x \to f(\lambda_0)x$ para todo $x \in X$. □

4.38 Proposición. *Si X, Y son espacios de Banach entonces la topología de $\mathcal{B}(X,Y)$ es más fina que la de $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $A_n \to A$ una sucesión convergente en $\mathcal{B}(X,Y)$ y sea $x \in X$ arbitrario. Entonces

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\|\,\|x\| \to 0,$$

es decir, $\mathrm{id}(A_n)x \to \mathrm{id}(A)x$ cuando $n \to \infty$. En otras palabras, el mapeo $\mathrm{id}(\cdot)x\colon B(X,Y) \to Y$ es continuo para todo $x \in X$. Por la caracterización de continuidad fuerte dada arriba eso implica la continuidad del mapeo $\mathrm{id}\colon \mathcal{B}(X,Y) \to \mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y)$ y muestra la afirmación. □

4.39 Lema. *Sean Λ un espacio métrico y $f\colon \Lambda \to \mathcal{B}_{\mathrm{s}}(X,Y)$ un mapeo.*

(a) *Si f es fuertemente continuo en un $\lambda_0 \in \Lambda$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que f es acotado en $B_\varepsilon(\lambda_0)$ respecto a la norma en $\mathcal{B}(X,Y)$.*

(b) *Sea f acotado en $B_\varepsilon(\lambda_0)$ respecto a la norma en $\mathcal{B}(X,Y)$, para un λ_0 y $\varepsilon > 0$. Si X_1 es un subespacio denso de X tal que*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda)x = f(\lambda_0)x \tag{4.120}$$

para todo $x \in X_1$, entonces f es fuertemente continuo en λ_0.

Demostración. **(a):** Supóngase por contradicción que existiera una sucesión $\lambda_n \to \lambda_0$ tal que $\|f(\lambda_n)\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \to \infty$. La continuidad fuerte en λ_0 implica que $f(\lambda_n)x$ es acotado en Y para todo $x \in X$. Por el principio de la acotación uniforme se tiene que $\|f(\lambda_n)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$ es acotado, una contradicción.

(a): Sea $\lambda_n \to \lambda_0$ convergente en Λ. Como $f(\lambda_n)$ es acotado en $\mathcal{B}(X,Y)$, existe $C > 0$ tal que $\|f(\lambda_n)\|, \|f(\lambda_0)\| \le C$ para todo n. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $y \in X_1$ tal que $\|x - y\| \le \varepsilon/3C$. Existe n_0 tal que $\|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| \le \varepsilon/3$ para $n \ge n_0$. En consecuencia

$$\begin{aligned}&\|f(\lambda_n)x - f(\lambda_0)x\| \\ &\qquad \le \|f(\lambda_n)\|\,\|x-y\| + \|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| + \|f(\lambda_0)\|\,\|x-y\| \le \varepsilon\end{aligned}$$

para $n \ge n_0$. Eso demuestra que $f(\lambda_n)x \to f(\lambda_0)x$ para todo $x \in X$. $\square$

Sea Λ un subconjunto abierto de un espacio de Banach Z y $f\colon \Lambda \to \mathcal{B}(X,Y)$ un mapeo. La función f es *fuertemente diferenciable en* $\lambda_0 \in \Lambda$ si el mapeo $\Lambda \to Y$, $z \mapsto f(z)x$ es diferenciable en λ_0 para todo $x \in X$.

4.40 Lema. *Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathcal{B}(X))$ fuertemente diferenciable en $t - 0 \in (a,b)$ y sea $x \in X$. Entonces el mapeo $(a,b) \to X$, $t \to f(t)g(t)x$ es diferenciable en t_0 y su derivada es*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} (f(t)g(t)x) = f(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} g(t)x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} f(t)g(t_0)x.$$

Demostración. Para $h \in \mathbb{R}$ suficientemente chico calculamos

$$\begin{aligned}&\frac{f(t_0+h)g(t_0+h)x - f(t_0)g(t_0)x}{h} \\ &\qquad = \frac{f(t_0+h)g(t_0+h)x - f(t_0+h)g(t_0)x}{h} + \frac{f(t_0+h)g(t_0)x - f(t_0)g(t_0)x}{h} \\ &\qquad = f(t_0+h)\left(\frac{g(t_0+h)x - g(t_0)x}{h}\right) + \frac{f(t_0+h)g(t_0)x - f(t_0)g(t_0)x}{h} \\ &\qquad\qquad \to f(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} g(t)x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} f(t)g(t_0)x.\end{aligned}$$

Para la convergencia del primer término usamos que

$$\frac{g(t_0+h)x - g(t_0)x}{h} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0} g(t)x$$

en X, que f es fuertemente continua en t_0 (una consecuencia de que $t \mapsto f(t)y$ es diferenciable en t_0 para todo $y \in X$) y un argumento como en la demostración del inciso (a) de la Proposición 4.37. $\square$

4.7. Semigrupos fuertemente continuos

En esta sección analizamos la exponencial de operadores no acotados en un espacio de Banach. En esto no podemos aplicar el teorema espectral para operadores normales en un espacio de Hilbert.

La motivación es una generalización de la ecuación diferencial lineal homogéneo $\dot{u} = Au$, puesta en $\mathbb{R}^n$, a la ecuación análoga puesta en un espacio de Banach complejo X. Aquí el operador lineal A puede ser no acotado, para permitir operadores diferenciales como el Laplaciano. Como la solución en el caso de un operador acotado A es $\mathrm{e}^{tA}u(0)$, buscamos una forma similar de representar la solución en el caso de un operador A no acotado. En vez de usar la representación de la solución como exponencial, la cual no está bien definida, se define la noción del semigrupo fuertemente continuo, que tiene las propiedades buscadas.

Un operador lineal (posiblemente no acotado) en un espacio de Banach X se define de la misma manera como en espacios de Hilbert. También las nociones de *gráfica*, *operador cerrado* y *dominio denso* tienen definiciones análogas. Como norma en $X \times X$ aquí se usa $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$.

Usaremos la notación

$$R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

para la *resolvente de* A si A es un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$.

4.41 Definición. Sean X un espacio de Banach y $(Q(t))_{t\geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados en X que satisface

(i) $Q(0) = I$ y $Q(s + t) = Q(s)Q(t)$ para $s, t \geq 0$;

(ii) $\lim_{t\to 0+} Q(t)x = x$ para todo $x \in X$.

Entonces Q es un *semigrupo fuertemente continuo* en X (C_0-*semigrupo*).

4.42 Nota. El límite en (ii) está entendido respecto a la norma en X. En efecto, Q es fuertemente continuo en 0.

Toda $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua que cumple la ecuación funcional $f(\lambda + \mu) = f(\lambda)f(\mu)$ y $f(0) = 1$ tiene la representación $f(\lambda) = e^{a\lambda}$, donde $a = f'(0)$. Esto motiva la siguiente definición:

4.43 Definición. Si Q es un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, entonces

$$Ax := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Q(\varepsilon)x - x}{\varepsilon} \tag{4.121}$$

define un operador lineal con dominio $D(A)$ el conjunto de los $x \in X$ tal que existe el límite en (4.121), respecto a la norma en X. Este operador A es el *generador infinitesimal* de Q.

Veremos que en un sentido débil el semigrupo tiene la representación $Q(t) = \exp(tA)$.

4.44 Teorema. *Un C_0-semigrupo Q en un espacio de Banach X con generador infinitesimal A tiene las siguientes propiedades:*

(a) *Existen constantes $C \geq 1$ y $\gamma \geq 0$ tales que*

$$\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{4.122}$$

(b) *Q es fuertemente continuo en $\mathbb{R}_0^+$.*

(c) *$D(A)$ es denso en X y A es cerrado.*

(d) *Para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene $Q(t)x \in D(A)$ y se cumple la ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)x = AQ(t)x = Q(t)Ax. \tag{4.123}$$

(e) *Escribiendo*

$$A_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - I) \in \mathcal{B}(X), \tag{4.124}$$

se tiene que $A_\varepsilon x \to Ax$ para todo $x \in D(A)$ cuando $\varepsilon \to 0$, y que

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathrm{e}^{tA_\varepsilon} x \tag{4.125}$$

para todo $x \in X$. La convergencia en (4.125) es uniforme para t en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}_0^+$.

(f) *Sean $C \geq 1$ y $\gamma \geq 0$ tales que (4.122) se cumple. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$, entonces se cumple $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$ y*

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \, \mathrm{d}t. \tag{4.126}$$

4.45 Nota. Los límites en la derivada en (d) y en (e) se entienden respecto a la norma en X. El inciso (f) implica que $\sigma(A) \subseteq [\mathrm{Re}(\lambda) \leq \gamma]$.

4.46 Lema. *Sean $A, B \in \mathcal{B}(X)$ operadores que conmutan, y sea*

$$C := \max\{\|A\|, \|B\|\}.$$

Entonces

$$\|e^A - e^B\| \leq e^C \|A - B\|. \tag{4.127}$$

Además, la función $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(X)$, $t \mapsto e^{tA}$ es continuamente diferenciable, con derivada $Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Demostración. Para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $AB = BA$ implica que

$$A^k - B^k = (A - B) \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} B^\ell. \tag{4.128}$$

En seguida,

$$\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| \sum_{\ell=0}^{k-1} \|A\|^{k-1-\ell} \|B\|^\ell = kC^{k-1} \|A - B\|$$

y luego

$$\begin{aligned}\|e^A - e^B\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k - B^k\| \\ &\leq \|A - B\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} kC^{k-1} = e^C \|A - B\|.\end{aligned}$$

Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Remplazando A por tA y B por sA, (4.128) implica

$$\begin{aligned}\frac{e^{tA} - e^{sA}}{t - s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} t^{k-1-\ell} s^\ell \right) \\ &\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1} = Ae^{tA} = e^{tA} A\end{aligned}$$

cuando $s \to t$, por la convergencia uniforme de la serie para s, t en intervalos acotados. □

Demostración del Teorema 4.44. (a)*:* Como Q es fuertemente continuo en 0, el Lema 4.39(a) implica que existen $C, \delta > 0$ tales que $\|Q(t)\| \leq C$ para todo $t \in [0, \delta]$. Necesariamente se tiene $C \geq \|Q(0)\| = \|I\| = 1$. Si $t \in \mathbb{R}_0^+$, pongamos $n := \lfloor t/\delta \rfloor + 1$, así que

$$(n - 1)\delta \leq t < n\delta. \tag{4.129}$$

Entonces $\|Q(t/n)\| \le C$. Usando la ecuación funcional de la Definición 4.41(I) y $C \ge 1$ se sigue que

$$\|Q(t)\| = \|Q(t/n)^n\| \le C^n \le C^{1+t/\delta}.$$

Basta escoger γ tal que $\mathrm{e}^\gamma = C^{1/\delta}$. Como $C \ge 1$, $\gamma \ge 0$.

(b): Si $0 \le s < t \le T$ entonces el inciso (a) y la ecuación funcional para Q implican

$$\|Q(t)x - Q(s)x\| \le \|Q(s)\|\,\|Q(t-s)x - x\| \le C\mathrm{e}^{\gamma T}\|Q(t-s)x - x\| \to 0$$

cuando $|s-t| \to 0$. Esto comprueba continuidad fuerte por la derecha y por la izquierda.

(c): El inciso (b) implica que $t \mapsto Q(t)x$ es continuo como mapeo de $\mathbb{R}_0^+$ en X, para todo $x \in X$. Entonces se puede definir un operador M_t por

$$M_t x := \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s \qquad \text{para } t > 0, x \in X.$$

Se tiene por el inciso (a)

$$\begin{aligned}\|M_t x\| \le \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s)x\|\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{t}\int_0^t C\mathrm{e}^{\gamma s}\|x\|\,\mathrm{d}s \\ \le \frac{1}{t}\int_0^t C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|\,\mathrm{d}s = C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|,\end{aligned}$$

es decir,

$$M_t \in \mathcal{B}(X) \qquad \text{y} \qquad \|M_t\| \le C\mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \text{para todo } t \ge 0. \tag{4.130}$$

Además se tiene para $x \in X$ y $t > 0$ por el teorema del valor intermedio que existe $s' \in (0,t)$ tal que

$$\begin{aligned}\|M_t x - x\| \le \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s)x - x\|\,\mathrm{d}s \\ = \|Q(s')x - x\| \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0.\end{aligned} \tag{4.131}$$

Afirmamos que

$$A_\varepsilon M_t x = A_t M_\varepsilon x \qquad \text{para todo } \varepsilon, t > 0,\ x \in X. \tag{4.132}$$

Para demostrar esta afirmación, notemos que para integrales sobre funciones continuas en $\mathbb{R}_0^+$ se cumple la identidad

$$\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} - \int_0^t = \int_t^{t+\varepsilon} - \int_0^\varepsilon. \tag{4.133}$$

El lado izquierdo aplicado al integrando $Q(s)x$ da

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} Q(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s &= \int_0^t Q(\varepsilon+s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t (Q(\varepsilon)-I)Q(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= (Q(\varepsilon)-I)\int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= \varepsilon A_\varepsilon t M_t x.\end{aligned}$$

En la misma manera el lado derecho de (4.133) da $tA_t\varepsilon M_\varepsilon x$. Eso comprueba (4.132).

Por (4.131) el lado derecho de (4.132) tiende a $A_t x$ cuando $\varepsilon \to 0$. Las definiciones de A_ε y $D(A)$ implican que $M_t x \in D(A)$. Otra vez usando (4.131), obtenemos que $D(A)$ es denso. Además,

$$AM_t x = A_t x \qquad \text{para todo } x \in X,\ t > 0. \tag{4.134}$$

Para demostrar que A es cerrado, sean $(x_n) \subseteq D(A)$, $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ en X. Para cualquier $z \in X$ calculamos

$$\begin{aligned}A_\varepsilon M_t z &= \frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon)M_t z - M_t z)\\ &= \frac{1}{t\varepsilon}\int_0^t \Big(Q(\varepsilon)Q(s)z - Q(s)z\Big)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{t\varepsilon}\int_0^t Q(s)(Q(\varepsilon)z - z)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)A_\varepsilon z\,\mathrm{d}s\\ &= M_t A_\varepsilon z,\end{aligned} \tag{4.135}$$

es decir, A_ε y M_t conmutan. Como $M_t z \in D(A)$, dejando $\varepsilon \to 0$ se tiene que

$$AM_t z = M_t A z \qquad \text{para todo } z \in D(A).$$

Usando (4.134) eso implica

$$A_t x_n = AM_t x_n = M_t A x_n \qquad \text{para todo } t > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dejando $n \to \infty$ llegamos a

$$A_t x = M_t y, \tag{4.136}$$

considerando que A_t y M_t son operadores acotados. Dejando $t \to 0$ en (4.136), por (4.131) el lado derecho converge a y, es decir, $x \in D(A)$, $Ax = y$ y

$$A_t x = M_t A x \qquad \text{para todo } t > 0,\ x \in D(A). \tag{4.137}$$

Entonces A es cerrado.

(d): Es obvio que A_ε y $Q(t)$ conmutan en X, para $\varepsilon > 0$ y $t \geq 0$. Si $x \in D(A)$, dejando $\varepsilon \to 0$ en

$$A_\varepsilon Q(t)x = Q(t)A_\varepsilon x$$

muestra que $Q(t)x \in D(A)$, porque el lado derecho converge, y se tiene

$$AQ(t)x = Q(t)Ax \qquad \text{para todo } x \in D(A),\ t \geq 0. \tag{4.138}$$

Sea $x \in D(A)$. Calculemos la derivada por la derecha de $Q(t)x$:

$$\frac{1}{\varepsilon}(Q(t+\varepsilon)x - Q(t)x) = A_\varepsilon Q(t)x \to AQ(t)x = Q(t)Ax$$

cuando $\varepsilon \to 0+$, porque $Q(t)x \in D(A)$ y por (4.138). Falta ver que para $x \in D(A)$ y $t > 0$ existe la derivada por la izquierda de $Q(t)x$. Si $\varepsilon \in (0,t)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{-\varepsilon}&(Q(t-\varepsilon)x - Q(t)x)\\ &= Q(t-\varepsilon)(A_\varepsilon x - Ax) + Q(t-\varepsilon)Ax \to Q(t)Ax\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0+$. Esto se sigue porque $\|Q\|$ es acotada en $[0,t]$, $x \in D(A)$ (esto hace que el primer término tiende a cero) y por la continuidad fuerte de Q en t. Entonces $Q(t)x$ es diferenciable y se cumple (4.123).

(e): Primero establecimos una cota para $\|\exp(tA_\varepsilon)\|$ que no depende de ε para ε pequeño. Sean $t \geq 0$ y $\varepsilon \in (0,1]$. Usando (4.122) y $\gamma \geq 0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\|\exp(tA_\varepsilon)\| &= \left\|\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - I)\right)\right\|\\ &= \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\left\|\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon)\right)\right\|\\ &\leq \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k\|Q(k\varepsilon)\|\\ &\leq C\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}\right)^k\\ &= C\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon} - 1)\right)\\ &= C\exp\left(t\left(\gamma + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma^2 + \dots\right)\right)\\ &\leq C\exp(t(\mathrm{e}^{\gamma} - 1)).\end{aligned} \tag{4.139}$$

Fijamos $x \in D(A)$, $\varepsilon \in (0,1]$ y $t \geq 0$. Definimos una función $\varphi\colon [0,t] \to X$ por

$$\varphi(s) := \exp((t-s)A_\varepsilon)Q(s)x.$$

Por el Lema 4.46

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{sA_\varepsilon}y = \mathrm{e}^{sA_\varepsilon}A_\varepsilon y \tag{4.140}$$

para todo $y \in X$ y $s \geq 0$. El Lema 4.40, el inciso (d) —aplicado a $Q(s)$— y (4.140) implican que φ es diferenciable y que

$$\varphi'(s) = \exp((t-s)A_\varepsilon)Q(s)(Ax - A_\varepsilon x). \tag{4.141}$$

Aquí hemos usado de nuevo que A_ε y $Q(s)$ conmutan. Notemos además que φ' es continua por la continuidad fuerte de Q y por la Proposición 4.37(a). El inciso (a) y la ecuación (4.139) implican que existe una constante $K(t) \geq 0$ que sólo depende de t (continuamente) tal que

$$\|\varphi'(s)\| \leq K(t)\|Ax - A_\varepsilon x\| \qquad \text{para todo } s \in [0,t]. \tag{4.142}$$

Demostremos el teorema fundamental del cálculo para la función φ: para todo $\Lambda \in X^*$ y $s \in [0,t]$ se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Lambda\varphi(s) = \Lambda\varphi'(s)$$

y entonces por la continuidad de φ'

$$\Lambda(\varphi(t) - \varphi(0)) = \Lambda\varphi(t) - \Lambda\varphi(0) = \int_0^t \Lambda\varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \Lambda\int_0^t \varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Eso da

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.143}$$

Usando que $\varphi(t) = Q(t)x$ y $\varphi(0) = \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x$, (4.143) y (4.142) implican

$$\|Q(t)x - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x\| \leq \int_0^t \|\varphi'(s)\|\,\mathrm{d}s \leq tK(t)\|Ax - A_\varepsilon x\| \tag{4.144}$$
$$\text{para todo } t \geq 0,\ x \in D(A), \varepsilon \in (0,1].$$

Dejando $\varepsilon \to 0+$ obtenemos (4.125) para $x \in D(A)$.

Si $T \geq 0$ es fijo, el inciso (a) y (4.139) dicen que las normas de los operadores acotados $Q(t)$ y $\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}$ son uniformemente acotadas para $t \in [0,T]$ y $\varepsilon \in (0,1]$, por alguna constante C. Por la continuidad de K podemos suponer que además $|tK(t)| \leq C$ para $t \in [0,T]$. Sean $x \in X$ y $\delta > 0$. Escogemos $y \in D(A)$ tal que $2C\|x-y\| \leq \delta/2$. Existe $\varepsilon_0 \in (0,1]$ tal que

$$C\|Ay - A_\varepsilon y\| \leq \delta/2$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Se sigue de (4.144) para tal ε y cualquier $t \in [0, T]$ que

$$\begin{aligned}
&\|Q(t)x - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x\| \\
&\qquad \le \|Q(t)[x-y]\| + \|(Q(t) - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon})y\| + \|\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}[y-x]\| \\
&\qquad \le 2C\|x-y\| + tK(t)\|Ay - A_\varepsilon y\| \\
&\qquad \le \delta.
\end{aligned}$$

Eso muestra que $\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x \to Q(t)x$ cuando $\varepsilon \to 0$, uniformemente para $t \in [0, T]$.

(f): Para $x \in X$ y $0 \le T_1 \le T_2$ se tiene por el inciso (a) y por $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$ que

$$\left\| \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right\| \le C \int_{T_1}^{\infty} \mathrm{e}^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)t} \|x\| \,\mathrm{d}t \le \frac{C}{\operatorname{Re}(\lambda - \gamma)}\, \mathrm{e}^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)T_1} \|x\| \to 0 \tag{4.145}$$

cuando $T_1 \to \infty$. Eso demuestra que está bien definido

$$\widetilde{R}(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t := \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t.$$

Para $T_1 = 0$ y cualquier $x \in X$ (4.145) implica

$$\|\widetilde{R}(\lambda)x\| \le \frac{C}{\operatorname{Re}(\lambda - \gamma)} \|x\|.$$

Entonces $\widetilde{R}(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$.

Por las definiciones de A_ε y $\widetilde{R}(\lambda)$ se tiene para $\varepsilon > 0$ y $x \in X$

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon \widetilde{R}(\lambda)x &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t+\varepsilon)x \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\varepsilon^\infty \mathrm{e}^{-\lambda (t-\varepsilon)} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \\
&\to \lambda \widetilde{R}(\lambda)x - x
\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Eso implica que $\widetilde{R}(\lambda)x \in D(A)$ y que

$$(\lambda I - A)\widetilde{R}(\lambda)x = x \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{4.146}$$

Por otro lado, si $x \in D(A)$ una aplicación del inciso (d) da

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\lambda)Ax &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)Ax \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)x \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \right) \mathrm{d}t \\ &= -x + \lambda \widetilde{R}(\lambda)x.\end{aligned}$$

En la última igualdad aplicamos el teorema fundamental del cálculo, cuya validez ya hemos visto arriba. Llegamos a

$$\widetilde{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x \qquad \text{para todo } x \in D(A). \tag{4.147}$$

Como vimos antes, $\widetilde{R}(\lambda)(X) \subseteq D(A)$. Entonces (4.147) implica que $\widetilde{R}(\lambda) \colon X \to D(A)$ es suprayectiva, y junto con (4.146) obtenemos que

$$\widetilde{R}(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda; A).$$

Eso termina la demostración del inciso (f). □

4.47 Nota. La formula (4.126) se puede entender fácilmente si $Q(t) = \mathrm{e}^{at}$ para un $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda > a$. Entonces $a - \lambda < 0$ y por eso

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{at} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(a-\lambda)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a-\lambda} \mathrm{e}^{(a-\lambda)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda - a}.$$

La integral en (4.126) es la *transformada de Laplace* de $Q(t)x$.

Como el modelo de un semigrupo de operadores con generador infinitesimal A es e^{tA}, interesa saber como uno puede representar un C_0-semigrupo por su generador infinitesimal. Demostremos y mencionemos algunos resultados al respecto.

4.48 Teorema. *Sea $(Q(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semigrupo en el espacio de Banach X con generador infinitesimal A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $D(A) = X$,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0$,

(iii) $A \in \mathcal{B}(X)$ *y* $Q(t) = \mathrm{e}^{tA}$ *para* $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Demostración. **(i) implica (ii):** Sea A_ε definido como en el Teorema 4.44(e). El teorema de la acotación uniforme da que $\|A_\varepsilon\|$ es acotada uniformemente para ε pequeño, porque $\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon x$ existe para todo $x \in X$. En seguida, $\|Q(\varepsilon) - I\| = \varepsilon \|A_\varepsilon\| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

(ii) implica (iii): Recordemos la notación

$$M_t x = \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s \qquad \text{para todo } x \in X$$

de la demostración del Teorema 4.44. Se cumple

$$\|M_t x - x\| \le \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s) - I\|\,\|x\|\,\mathrm{d}s \le \max_{s\in[0,t]} \|Q(s) - I\|\,\|x\|,$$

es decir,

$$\|M_t - I\| \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0, \tag{4.148}$$

por la hipótesis del inciso (ii). Fijemos $t > 0$ tan chico que M_t es invertible en $\mathcal{B}(X)$ (por la serie de Neumann). Por (4.132) y (4.135) tenemos que $M_t A_\varepsilon = A_t M_\varepsilon$ y entonces

$$A_\varepsilon = M_t^{-1} A_t M_\varepsilon \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0. \tag{4.149}$$

Para todo $x \in X$ (4.131) dice que $\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon x = x$. En seguida, (4.149) y $M_t^{-1} A_t \in \mathcal{B}(X)$ implican que $A_\varepsilon x$ converge para todo $x \in X$, es decir, $D(A) = X$. Como A es cerrado, $A \in \mathcal{B}(X)$. Usamos (4.137) y (4.148) y obtenemos que

$$\|A_\varepsilon - A\| \le \|M_t^{-1} A_t\|\,\|M_\varepsilon - I\| \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

En seguida, $\|A_\varepsilon\| \le 2\|A\|$ para ε suficientemente chico. El inciso (d) del Teorema 4.44 implica que A y $Q(\varepsilon)$ y luego A y A_ε conmutan para $\varepsilon > 0$. Estos hechos y el Lema 4.46 muestran que

$$\|\mathrm{e}^{tA_\varepsilon} - \mathrm{e}^{tA}\| \le \exp(2\|A\|)\|A_\varepsilon - A\| \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Por el inciso (e) del Teorema 4.44 obtenemos que

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{e}^{tA_\varepsilon} x = \mathrm{e}^{tA} x$$

para todo $x \in X$.

Que (iii) implica (i) es trivial. □

4.49 Teorema (Hille-Yosida)**.** *Sean $C \ge 1$ y $\gamma \ge 0$. Un operador cerrado y densamente definido A en un espacio de Banach X es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $(Q(t))_{t\ge 0}$ con la propiedad*

$$\|Q(t)\| \le C\mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \textit{para todo } t \ge 0 \tag{4.150}$$

si y sólo si se cumple

$$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A) \quad \textit{y} \quad \|R(\lambda; A)^m\| \le C(\lambda - \gamma)^{-m} \qquad \textit{para todo } \lambda > \gamma,\ m \in \mathbb{N}. \tag{4.151}$$

En ese caso sea

$$\operatorname{Yos}(\varepsilon; A) := A(I - \varepsilon A)^{-1} \qquad \textit{para } \varepsilon \in (0, 1/\gamma)$$

la ε-aproximación de Yosida *de* A*. Se tiene*

$$\operatorname{Yos}(\varepsilon; A) \in \mathcal{B}(X), \qquad \textit{para todo } \varepsilon \in (0, 1/\gamma), \tag{4.152}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \operatorname{Yos}(\varepsilon; A)x = Ax, \qquad \textit{para todo } x \in D(A), \tag{4.153}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \exp(t\operatorname{Yos}(\varepsilon; A))x = Q(t)x, \qquad \textit{para todo } x \in X,\ t \geq 0. \tag{4.154}$$

Demostración. Primero sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $(Q(t))_{t\geq 0}$ tal que (4.150) se cumple. Por el Teorema 4.44(f) sabemos que para $\lambda > \gamma$ se tiene que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ y

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \tag{4.155}$$

para todo $x \in X$. Afirmamos que

$$R(\lambda; A)^m x = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty t^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in X,\ m \in \mathbb{N}. \tag{4.156}$$

Para demostrar esa afirmación por inducción, sean $\Omega_1 := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y

$$\Omega_2 := \{(u, v) \in \Omega_1 \mid u < v\}.$$

Definimos el difeomorfismo $\Phi \colon \Omega_2 \to \Omega_1$ por $\Phi(u, v) = (u, v - u)$. Se cumple

$$\mathrm{D}\Phi(u, v) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$|\det \mathrm{D}\Phi(u, v)| = 1 \qquad \text{para todo } (u, v) \in \Omega_2. \tag{4.157}$$

Suponemos que (4.156) se cumple para un $m \in \mathbb{N}$. Sean $x \in X$ y $\Lambda \in X^*$. Como $\lambda > \gamma$, la función

$$(s, t) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} \Lambda Q(s + t) s^{m-1} x$$

es un elemento de $L^1(\Omega_1)$, por la cota (4.150). Aplicamos (4.155), la transformación de variables de integración $(s,t)=\Phi(u,v)$, (4.157) y el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\Lambda R(\lambda;A)^{m+1}x &= \Lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}Q(t)\frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty s^{m-1}\mathrm{e}^{-\lambda s}Q(s)x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t && \text{(4.155) y (4.156)}\\
&= \frac{1}{(m-1)!}\int_{\Omega_1} s^{m-1}\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}\Lambda Q(s+t)x\,\mathrm{d}(s,t) && \text{por Fubini}\\
&= \frac{1}{(m-1)!}\int_{\Omega_2} u^{m-1}\mathrm{e}^{-\lambda v}\Lambda Q(v)x\,\mathrm{d}(u,v) && \text{(4.157)}\\
&= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda v}\Lambda Q(v)x\int_0^v u^{m-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v && \text{por Fubini}\\
&= \frac{1}{m!}\int_0^\infty v^m\mathrm{e}^{-\lambda v}\Lambda Q(v)x\,\mathrm{d}v\\
&= \Lambda\frac{1}{m!}\int_0^\infty v^m\mathrm{e}^{-\lambda v}Q(v)x\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Como $\Lambda\in X^*$ era arbitrario, obtenemos

$$R(\lambda;A)^{m+1}x=\frac{1}{m!}\int_0^\infty v^m\mathrm{e}^{-\lambda v}Q(v)x\,\mathrm{d}v.$$

Junto con (4.155) (el caso $m=1$) eso comprueba (4.156).

Obtenemos de (4.156) que

$$\|R(\lambda;A)^m\|\le\frac{C}{(m-1)!}\int_0^\infty t^{m-1}\mathrm{e}^{(\gamma-\lambda)t}\,\mathrm{d}t=C(\lambda-\gamma)^{-m},$$

haciendo $m-1$ integraciones parciales y una integración final.

Inversamente, sea A densamente definido tal que (4.151) se cumple. Ponemos $\varepsilon_0:=1/\gamma$ así que (4.151) implica que $S(\varepsilon):=(I-\varepsilon A)^{-1}$ está bien definido y se cumple

$$\|S(\varepsilon)^m\|\le C(1-\varepsilon\gamma)^{-m}\qquad\text{para todo } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\ m\in\mathbb{N}. \tag{4.158}$$

Además, tenemos que

$$S(\varepsilon)(I-\varepsilon A)\subseteq(I-\varepsilon A)S(\varepsilon)=I. \tag{4.159}$$

La ecuación (4.158) para $m=1$ implica que $\|S(\varepsilon)\|$ es acotada uniformemente para $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0/2)$. Si $x\in D(A)$ entonces $x-S(\varepsilon)x=-\varepsilon S(\varepsilon)Ax\to 0$ cuando $\varepsilon\to 0$, es decir, $\lim_{\varepsilon\to 0+}S(\varepsilon)x=x$ para todo $x\in D(A)$. Como $\|S(\varepsilon)\|$ queda acotado cuando $\varepsilon\to 0$ y $D(A)$ es denso el Lema 4.39(b) implica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}S(\varepsilon)x=x\qquad\text{para todo } x\in X. \tag{4.160}$$

Notemos que $S(\varepsilon)\colon X\to D(A)$ y que (4.159) implica que $S(\varepsilon)Ax=AS(\varepsilon)x$ para todo $x\in D(A)$. En seguida

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\operatorname{Yos}(\varepsilon;A)x=\lim_{\varepsilon\to 0+}AS(\varepsilon)x=\lim_{\varepsilon\to 0+}S(\varepsilon)Ax=Ax$$

para $x \in D(A)$, es decir, se cumple (4.153). Tenemos por (4.159) que

$$AS(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(S(\varepsilon) - I) \in \mathcal{B}(X) \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{4.161}$$

comprobando (4.152). Además, está bien definido

$$T(t;\varepsilon) := \exp(tAS(\varepsilon)) = \exp(t\mathrm{Yos}(\varepsilon; A)).$$

Afirmamos que

$$\|T(t;\varepsilon)\| \le C \exp\left(\frac{\gamma t}{1-\varepsilon\gamma}\right) \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ t > 0. \tag{4.162}$$

Para demostrar eso usemos (4.161) y (4.158):

$$\begin{aligned}
\|T(t;\varepsilon)\| &= \left\|\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}S(\varepsilon)\right)\right\| \\
&\le \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k \|S(\varepsilon)^k\| \\
&\le C\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k (1-\varepsilon\gamma)^{-k} \\
&= C\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(1-\varepsilon\gamma)^{-1}\right) \\
&= C\exp\left(\frac{t\gamma}{1-\varepsilon\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Para demostrar la convergencia de $T(t;\varepsilon)x$ cuando $\varepsilon \to 0+$, notemos primero que $T(t;\delta)^{-1} = \mathrm{e}^{-tAS(\delta)}$. En consecuencia, para $x \in D(A)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T(t;\varepsilon)T(t;\delta)^{-1}x) = T(t;\varepsilon)T(t;\delta)^{-1}(S(\varepsilon) - S(\delta))Ax.$$

Después de una integración de 0 a t y la aplicación de $T(t;\delta)$ obtenemos (usando que A, $S(\varepsilon)$, $S(\delta)$, $T(t;\varepsilon)$ y $T(t;\delta)$ conmutan dos a dos)

$$T(t;\varepsilon)x - T(t;\delta)x = \int_0^t T(u;\varepsilon)T(t-u;\delta)(S(\varepsilon) - S(\delta))Ax\,\mathrm{d}u.$$

Poniendo $\bar\varepsilon := \max\{\varepsilon,\delta\}$ calculamos con (4.162) y (4.160):

$$\begin{aligned}
\|T(t;\varepsilon)x - T(t;\delta)x\| &\le \int_0^t \|T(u;\varepsilon)T(t-u;\delta)(S(\varepsilon) - S(\delta))Ax\|\,\mathrm{d}u \\
&\le C^2\int_0^t \exp\left(\frac{\gamma u}{1-\bar\varepsilon\gamma}\right)\exp\left(\frac{\gamma(t-u)}{1-\bar\varepsilon\gamma}\right)\|(S(\varepsilon) - S(\delta))Ax\|\,\mathrm{d}u \\
&= C^2 t\exp\left(\frac{\gamma t}{1-\bar\varepsilon\gamma}\right)\|(S(\varepsilon) - S(\delta))Ax\| \\
&\to 0 \qquad\qquad \text{cuando } \bar\varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Eso implica que existe el límite

$$Q(t)x := \lim_{\varepsilon\to 0} T(t;\varepsilon)x \tag{4.163}$$

para todo $x \in D(A)$, y la convergencia es localmente uniforme en t. La ecuación (4.162) implica que $\|T(t;\varepsilon)\|$ es acotada uniformemente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/2)$ y t en intervalos acotados. Como $D(A)$ es denso en X, el Lema 4.39(b) implica que existe el límite en (4.163) para todo $x \in X$ y la convergencia es localmente uniforme en t, para x fijo.

La misma acotación uniforme de $T(t;\varepsilon)$ implica por la definición de Q y porque $T(\varepsilon, t)$ es un semigrupo que también Q es un semigrupo:

$$\begin{aligned}
&\|Q(t)Q(s)x - T(t+s;\varepsilon)x\| \\
&\qquad = \|Q(t)Q(s)x - T(t;\varepsilon)T(s;\varepsilon)x\| \\
&\qquad \le \|(Q(t) - T(t;\varepsilon))Q(s)x\| + \|T(t;\varepsilon)\|\,\|Q(s)x - T(s;\varepsilon)x\| \\
&\qquad \to 0 \qquad\quad \text{cuando } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

y

$$T(t+s;\varepsilon)x \to Q(t+s)x \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Como para todo $x \in X$ el mapeo $t \mapsto Q(t)x$ es un límite localmente uniforme en t de los mapeos continuos $T(t;\varepsilon)x$, también $Q(t)x$ depende de t continuamente. Estos hechos comprueban que $(Q(t))_{t\ge 0}$ es un C_0-semigrupo en X.

Sea $\widetilde{A}$ el generador infinitesimal de Q. Necesitamos demostrar que $\widetilde{A} = A$. Sea $x \in D(A)$. Aplicando Teorema 4.44(d) al semigrupo $T(t;\varepsilon)$ obtenemos

$$Q(t)x - x = \lim_{\varepsilon\to 0} T(t;\varepsilon)x - x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t T(s;\varepsilon)S(\varepsilon)Ax\,\mathrm{d}s. \tag{4.164}$$

La cota (4.162) y la convergencia (4.163), que son localmente uniformes en t, implican que

$$\begin{aligned}
&\|T(s;\varepsilon)S(\varepsilon)Ax - Q(s)Ax\| \\
&\qquad \le \|T(s;\varepsilon)\|\,\|S(\varepsilon)Ax - Ax\| + \|T(s;\varepsilon)Ax - Q(s)Ax\| \\
&\qquad\qquad \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

uniformemente para $s \in [0,t]$. En seguida, (4.164) implica que

$$Q(t)x - x = \int_0^t Q(s)Ax\,\mathrm{d}s = tM_tAx \qquad \text{para todo } x \in D(A).$$

Aquí M_t está definido como en la demostración del Teorema 4.44. Definiendo $\widetilde{A}_t x$ como en el Teorema 4.44, eso da

$$\widetilde{A}_t x = \frac{Q(t)x - x}{t} = M_tAx \to Ax \qquad \text{cuando } t \to 0.$$

Por lo tanto, $x \in D(\widetilde{A})$ y $\widetilde{A}x = Ax$ para todo $x \in D(A)$, es decir, $A \subseteq \widetilde{A}$.

Mostremos que

$$\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.165}$$

Sea $x \in X$. Usando (4.162) y (4.163) se sigue que

$$\|Q(t)x\| = \lim_{\varepsilon\to 0}\|T(t;\varepsilon)x\| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C\exp\left(\frac{\gamma t}{1-\varepsilon\gamma}\right)\|x\| = C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|.$$

Tomar el supremo sobre todo $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ implica (4.165).

Sea $\lambda > \gamma$. La ecuación (4.165), el Teorema 4.44 y la hipótesis del actual teorema implican que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A) \cap \mathbb{C}\backslash\sigma(\widetilde{A})$. Entonces

$$(\lambda I - \widetilde{A})(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X,$$

es decir,

$$D(\widetilde{A}) = (\lambda I - \widetilde{A})^{-1}(X) = D(A)$$

y $\widetilde{A} = A$. □

En el próximo resultado consideramos C_0-semigrupos en un espacio de Hilbert H. Si A es un operador normal en H con descomposición espectral E tal que

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} < \infty \tag{4.166}$$

entonces para $t \geq 0$ la función $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{t\lambda}$ es acotada en $\sigma(A)$. En consecuencia,

$$Q(t) = \mathrm{e}^{tA}$$

define un semigrupo de operadores acotados normales en H por el Teorema 3.26 y el Teorema 4.26. Si $x \in H$ entonces

$$\|Q(t)x - x\|^2 = \int_{\sigma(A)} |\mathrm{e}^{t\lambda} - 1|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \to 0$$

cuando $t \to 0$ ya que $|\mathrm{e}^{t\lambda} - 1|^2 \to 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (el integrando y la medida $\mathrm{d}E_{x,x}$ son acotadas en $\sigma(A)$). Entonces Q es un C_0-semigrupo. El próxomo teorema establece el inverso de esa observación.

4.50 Teorema. *Sea Q un C_0-semigrupo en un espacio de Hilbert H tal que cada operador $Q(t) \in \mathcal{B}(H)$ es normal. Entonces el generador infinitesimal A de Q es normal. Además,* (4.166) *se cumple y*

$$Q(t) = \mathrm{e}^{tA} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.167}$$

Si cada $Q(t)$ es un operador unitario entonces existe un operador autoadjunto S en H tal que

$$Q(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tS} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.168}$$

Demostración. Para todo $s, t \geq 0$ $Q(s)$ y $Q(t)$ conmutan. Entonces el Teorema 3.19 implica que también $Q(s)$ y $Q(t)^*$ conmutan. Por ello la subálgebra cerrada minimal de $\mathcal{B}(H)$ que contiene a todo $Q(t)$ y todo $Q(t)^*$ es normal. Sea Δ su espacio de ideales maximales y sea E la resolución de la identidad correspondiente, según el Teorema 3.28.

Sean f_t y a_ε las transformadas de Gelfand de $Q(t)$ y A_ε. Se sigue para $\varepsilon > 0$ que

$$a_\varepsilon = \widehat{A}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(\widehat{Q(\varepsilon)} - \widehat{I}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(f_\varepsilon - 1\right),$$

$$f_\varepsilon^2 = \left(\widehat{Q(\varepsilon)}\right)^2 = \widehat{Q(\varepsilon)^2} = \widehat{Q(2\varepsilon)} = f_{2\varepsilon}$$

y luego que

$$a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\left(f_{2\varepsilon} - 1\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(f_\varepsilon - 1\right) = \frac{1}{2\varepsilon}(f_{2\varepsilon} - 2f_\varepsilon + 1) = \frac{1}{2\varepsilon}(f_\varepsilon - 1)^2 = \frac{\varepsilon}{2}a_\varepsilon^2. \tag{4.169}$$

Definimos

$$b(p) := \lim_{n\to\infty} a_{2^{-n}}(p) \tag{4.170}$$

para aquellos $p \in \Delta$ para los cuales el límite existe y es finito, y definmos $b(p) := 0$ para los demás $p \in \Delta$. Siendo el límite de funciones complejas y continuas en Δ, b es una función compleja de Borel. Sea $B := \Psi(b)$ como en el Teorema 4.24, con dominio

$$D(B) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \int_\Delta |b|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < \infty \right\}.$$

Entonces B es un operador normal en H.

Mostremos que $Q(t) = \mathrm{e}^{tB}$ y $A = B$. Si $x \in D(A)$ entonces $\|A_\varepsilon x\|$ es acotado cuando $\varepsilon \to 0$. Como

$$A_\varepsilon = \int_\Delta a_\varepsilon \,\mathrm{d}E$$

el Teorema 3.26 implica la existencia de una constante $C_x < \infty$ tal que

$$\int_\Delta |a_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \|A_\varepsilon x\|^2 \leq C_x \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0,1]. \tag{4.171}$$

Usando (4.169) y se sigue que

$$\int_\Delta |a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon| \,\mathrm{d}E_{x,x} \leq \frac{\varepsilon}{2}C_x \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0,1]. \tag{4.172}$$

Reemplazando ε por 2^{-n} en (4.172) y sumando las desigualdades para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\int_\Delta \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2^{-n+1}} - a_{2^n}| \,\mathrm{d}E_{x,x} \leq \frac{C_x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2^{-n+1}} - a_{2^n}| < \infty \qquad \text{c.d. respecto a } E_{x,x}.$$

En seguida, el límite en (4.170) existe c.d. respecto a $E_{x,x}$, y (4.171) junto con el Lema de Fatou implican que

$$\int_\Delta |b|^2 \, \mathrm{d}E_{x,x} \leq C_x. \tag{4.173}$$

En consecuencia, $D(A) \subseteq D(B)$.

Por (4.139) existe $\gamma_1 > 0$ que sólo depende de Q tal que

$$\|\mathrm{e}^{A_\varepsilon}\| \leq \gamma_1 \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0,1]. \tag{4.174}$$

Por el Teorema 2.35 $\|\mathrm{e}^{a_\varepsilon}\|_\infty \leq \gamma_1$ y luego $\|\mathrm{e}^{b}\|_\infty \leq \gamma_1$. Además, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} b(p) \leq \gamma \qquad \text{para todo } p \in \Delta. \tag{4.175}$$

Para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\|\exp(tA_{2^{-n}})x - \exp(tB)x\|^2 = \int_\Delta |\exp(ta_{2^{-n}}) - \exp(tb)|^2 \, \mathrm{d}E_{x,x} \to 0 \tag{4.176}$$

cuando $n \to \infty$ ya que el integrando queda acotado por $4\gamma_1^{2t}$ y tiende a 0 c.d. respecto a $E_{x,x}$. Entonces el Teorema 4.44(e) implica que

$$Q(t)x = \mathrm{e}^{tB}x \qquad \text{para todo } x \in D(A). \tag{4.177}$$

Como e^{tb} es una función acotada en Δ, $\mathrm{e}^{tB} \in \mathcal{B}(H)$. Los operadores acotados $Q(t)$ y e^{tB} coinciden en el conjunto denso $D(A)$ por (4.177), asi que

$$Q(t) = \mathrm{e}^{tB} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.178}$$

En consecuencia,

$$A_\varepsilon x - Bx = \left(\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon B} - I}{\varepsilon} - B \right) x$$

así que

$$\|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = \int_\Delta \left| \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon} - b \right|^2 \mathrm{d}E_{x,x}.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ el integrando de esta integral tiende a 0 en todo $p \in \Delta$. Como $|(\mathrm{e}^z - 1)/z|$ está acotado en todo semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq c\}$ y como el integrando puede ser escrito de la forma

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon b} - 1 \right|^2 |b|^2$$

Se sigue de (4.175) y del teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|A_\varepsilon x - Bx\| = 0 \qquad \text{para todo } x \in D(B).$$

se sigue que $D(B) \subseteq D(A)$ y que $A = B$.

La parte real de $\sigma(A)$ está acotada superiormente por (4.175) y por el Teorema 4.29(c).

Para mostrar la última afirmación sea Q un C_0-semigrupo unitario. Con la notación anterior se cumple que $|f_\varepsilon| = 1$ para cada $\varepsilon > 0$ ya que $\sigma(Q(\varepsilon)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (Teorema 3.33) y por el Teorema 2.21. Supongamos que para un $p \in \Delta$ el límite en (4.170) existe en $\mathbb{C}$. Escribimos $g_n := \operatorname{Re} f_{2^{-n}}(p)$ y $h_n := \operatorname{Im} f_{2^{-n}}(p)$. Entonces existen en $\mathbb{R}$ los límites

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n - 1}{2^{-n}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{2^{-n}},$$

así que $g_n \to 1$ y $h_n \to 0$. Además, $g_n^2 + h_n^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$\operatorname{Re} b(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{g_n - 1}{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{-n}}\left(\sqrt{1-h_n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{-n}}\left(\frac{-h_n^2}{\sqrt{1-h_n^2}+1}\right) = 0.$$

En los puntos $p \in \Delta$ donde el límite en (4.170) no existe tenemos que $b(p) = 0$. En consecuencia, b toma valores imaginarios en todo Δ. En la notación anterior $B = \Psi(b)$, así que $S := -\mathrm{i}B$ es autoadjunto por el Teorema 4.24(c). Además, la ecuación (4.178) implica (4.168). $\square$

Bibliografía

[1] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, vol. 96 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1985, págs. xiv+404, ISBN: 0-387-96042-2.

[2] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I*, de *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, págs. xiv+858, ISBN: 0-471-60848-3, General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[3] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear operators. Part II*, de *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, págs. i-x, i-x, ISBN: 0-471-60847-5, Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[4] H. Heuser, *Funktionalanalysis*, de *Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]*, B. G. Teubner, Stuttgart, fourth ed., 2006, pág. 696, ISBN: 978-3-8351-0026-8; 3-8351-0026-2, Theorie und Anwendung. [Theory and application].

[5] H. G. Heuser, *Functional analysis*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1982, págs. xv+408, ISBN: 0-471-28052-6; 0-471-10069-2, Translated from the German by John Horváth, A Wiley-Interscience Publication.

[6] E. Hille y R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, págs. xii+808, Third printing of the revised edition of 1957, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI.

[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, de *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1995, págs. xxii+619, ISBN: 3-540-58661-X, Reprint of the 1980 edition.

[8] E. R. Lorch, *Spectral theory*, de *University Texts in the Mathematical Sciences*, Oxford University Press, New York, 1962, págs. xii+158.

[9] W. Mlak, *Hilbert spaces and operator theory*, vol. 51 de *Mathematics and its Applications (East European Series)*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, págs. xii+290, ISBN: 0-7923-1042-X, Translated from the fourth Polish edition by Marcin E. Kuczma.

[10] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third ed., 1987, págs. xiv+416, ISBN: 0-07-054234-1.

[11] W. Rudin, *Functional analysis*, de *International Series in Pure and Applied Mathematics*, McGraw-Hill Inc., New York, second ed., 1991, págs. xviii+424, ISBN: 0-07-054236-8.

[12] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, vol. 36 de *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2002, págs. xxii+425, ISBN: 0-8218-2895-9.

[13] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, vol. 68 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1980, págs. xiii+402, ISBN: 0-387-90427-1, Translated from the German by Joseph Szücs.

[14] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1*, de *Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2000, pág. 475, ISBN: 3-519-02236-2, Grundlagen. [Foundations].

[15] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II*, de *Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2003, pág. 404, ISBN: 3-519-02237-0, Anwendungen. [Applications].